① Нека је $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}\in M_n(\mathbb{R})$ таква да је $a_{ij}\geq 0, \forall i\neq j$. Нека је $B=e^A=[b_{ij}]_{i,j=1}^{n}\in M_n(\mathbb{R})$.
Доказати $b_{ij}\geq 0, \forall i,j$.

$$A=\begin{bmatrix} ? & \geq 0 \\ \geq 0 & ? \end{bmatrix} \rightsquigarrow B=e^A=\begin{bmatrix} \geq 0 \end{bmatrix}$$

(*) Ако $a_{ij}\geq 0, \forall i,j \Rightarrow \frac{A^k}{k!}$ све елем. $\geq 0 \Rightarrow e^A$ све елем ≥ 0

пр.

$$\begin{bmatrix}-7 & & \bigcirc \\ & 2 & \\ \bigcirc & & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & & \bigcirc \\ & 9 & \\ \bigcirc & & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-7 & & 0 \\ & -7 & \\ 0 & & -7\end{bmatrix}$$

a_{ij} $\quad c_{ij}$ $\quad M=7$, $-M=-7$

$A=A_1+D$ ← дијагонална

$D=E\cdot(-M)=-M\cdot E \quad , M=\max\limits_{1\leq i\leq n}|a_{ii}|$

$A_1=A-D=A+M\cdot E=[c_{ij}]_{i,j=1}^{n}$

$$c_{ij}=\begin{cases} \underset{\geq 0}{a_{ij}}, & i\neq j \\ \underbrace{a_{ii}+M}_{\geq 0}, & i=j \end{cases} \geq 0 \qquad \Rightarrow e^{A_1} \text{ има све елем. } \geq 0$$

$$a_{ii}+M=a_{ii}+\max_{1\leq j\leq n}|a_{jj}|\geq a_{ii}+|a_{ii}|\geq 0$$

$$e^A=e^{A_1+D}\overset{②}{=}e^{A_1}\cdot e^D=e^{A_1}\cdot e^{-M}\cdot E=\underbrace{e^{-M}}_{\geq 0}\cdot \underbrace{e^{A_1}}_{\text{све елем. }\geq 0} \Rightarrow e^A \text{ има све елем } \geq 0$$

$b_{ij}\geq 0, \forall i,j$

② $A_1\cdot D=A_1\cdot(-ME)=-MA_1=(-ME)A_1=D\cdot A_1$

$D=\mathrm{diag}[-M \ -M \ \dots \ -M]\Rightarrow e^D=\mathrm{diag}[e^{-M} \ e^{-M} \ \dots \ e^{-M}]=e^{-M}\cdot E$

② Нека је $\lambda\in\mathbb{C}$ сопс. вр. матрице A. Доказати да је e^{λ} сопс. вр. матрице e^A.

(2) Нека је $\lambda \in \mathbb{C}$ сопс. вр. матрице A. Доказати да је e^{λ} сопс. вр. матрице e^{A}.

I начин $\exists v \neq 0$ сопс. век.

$Av = \lambda v$

Хоћемо: $\exists v_1 \neq 0$ т.д. $e^A v_1 = e^{\lambda} \cdot v_1$. Гледамо $v_1 = v$!

$$e^A v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k v}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k v}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot v = e^{\lambda} \cdot v$$

$$A^k v = A^{k-1}(Av) = A^{k-1} \cdot \lambda v = \lambda A^{k-1} v = \lambda A^{k-2}(Av) = \lambda A^{k-2}(\lambda v) = \lambda^2 A^{k-2} v = \dots$$
$$\dots = \lambda^{k-1} A v = \lambda^{k-1} \cdot \lambda v = \lambda^k v$$

II начин $\det(A - \lambda E) = 0$. Хоћемо $\det(e^A - e^{\lambda} E) = 0$.

$$\det(e^A - e^{\lambda} E) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot E \right) =$$

$$\overset{⊛}{=} \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k - \lambda^k E}{k!} \right) =$$

$$= \det\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k - \lambda^k E}{k!} \right) =$$

$$\overset{⊛}{=} \det\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k - (\lambda E)^k}{k!} \right) =$$

$$\overset{⊛}{=} \det\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A - \lambda E)(A^{k-1} + \dots + \lambda^{k-2} A + \lambda^{k-1} E)}{k!} \right) =$$

$$= \det\left(\lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{(A-\lambda E) \cdot (A^{k-1} + \dots + \lambda^{k-1} E)}{k!}}_{M_N} \right) =$$

$$= \det\left(\lim_{N\to\infty} (A - \lambda E) \cdot M_N \right) =$$

$$\overset{⊛}{=} \lim_{N\to\infty} \det\left((A - \lambda E) \cdot M_N \right) =$$

$$⊛ \quad \dots = 0$$

⊛ $k=0$:
$A^0 - \lambda^0 E = E - E = 0$

⊛ $\lambda^k E = \lambda^k \cdot E^k = (\lambda E)^k$

⊛ $A^k - B^k =$
$= (A-B)(A^{k-1} + AB^{k-2} + \dots + A^{k-2}B + B^{k-1})$
ако $AB = BA$

нпр. $A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B) =$
$= A^2 + AB - BA - B^2$

код нас:
$A \cdot \lambda E = \lambda \cdot A = \lambda E \cdot A$

⊛ $\det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$)
је непрекидна ф-ја
$A_N \to A_\infty$

$\lim_{N\to\infty} \det A_N = \det(\lim_{N\to\infty} A_N) = \det A_\infty$

⊛ $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

$$N\to\infty$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{N\to\infty} \underbrace{\det(A-\lambda E)}_{=0}\cdot \det(M_N) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} 0\cdot\det(M_N) = \lim_{N\to\infty} 0 = 0.$$

(*) $\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B$

$\boxed{T}$ Опште решење система $Y' = AY$, $A\in M_n(\mathbb{R})$ је $Y(x) = e^{xA}\cdot c$, $c\in\mathbb{R}^n$.

(3) Решити систем ДЈ $Y'=AY$ одређивањем матрице e^{xA} у облику степеног реда за:

а) $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ б) $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ в) $A=\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

$e^{xA}=?$ $A^k=?$ $e^{xA}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^kA^k}{k!}$

а) $A^1=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$

$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$

индукцијом: $A^k=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$

БАЗА: $k=1$ $A^1=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ ✓

КОРАК: $A^k=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix} \overset{?}{\Rightarrow} A^{k+1}=\begin{bmatrix}1&k+1\\0&1\end{bmatrix}$

$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&k+1\\0&1\end{bmatrix}$ ✓

$$e^{xA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^kA^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k\cdot\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}}{k!}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} & \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k\cdot k}{k!}\\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^x & xe^x\\0&e^x\end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x\ ;\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k\cdot k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k-1)!}=x\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}=x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=x\cdot e^x$$

ОР: $Y(x)=\begin{bmatrix}e^x & xe^x\\0&e^x\end{bmatrix}\cdot c$, $c\in\mathbb{R}^2$

б) $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} = -E$$

$$A^3 = A^2\cdot A = -E\cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3\cdot A = (-A)\cdot A = -A^2 = -(-E) = E$$

$$A^k = \begin{cases} A, & k\equiv_4 1\\ -A, & k\equiv_4 3\\ E, & k\equiv_4 0\\ -E, & k\equiv_4 2\end{cases} = \begin{cases} (-1)^l E, & k=2l,\ l\in\mathbb{N}_0\\ (-1)^l A, & k=2l+1,\ l\in\mathbb{N}_0\end{cases}$$

$k = 4t+r,\ r\in\{0,1,2,3\}$

$$A^k = A^{4t+r} = (A^4)^t\cdot A^r = E^t\cdot A^r = A^r$$

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k A^k}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{x^{2l}\cdot(-1)^l E}{(2l)!}\overset{k=2l}{} + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{x^{2l+1}\cdot(-1)^l A}{(2l+1)!}\overset{k=2l+1}{} =$$

$$= E\cdot\underbrace{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l x^{2l}}{(2l)!}}_{\cos x} + A\cdot\underbrace{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\cdot x^{2l+1}}{(2l+1)!}}_{\sin x} = \underbrace{\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{bmatrix}}_{R_x}$$

↳ матрица ротације (за угао $-x$, тј. $2\pi - x$)

OP: $y(x) = e^{xA}\cdot c = R_x\cdot c,\ c\in\mathbb{R}^2$

B) $A = \begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix}$

$$e^{xA} = e^{x\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix} + x\begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix}} \overset{(2)}{=} e^{x\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}}\cdot e^{x\begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix}} = e^{\operatorname{diag}[xa\ \ xa]}\cdot e^{xb\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}} = (*)$$

$$x^2\underbrace{\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}}_{=\,a\cdot E}\begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix} = x^2 a\cdot\begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}\cdot x^2$$

$$(*) = \begin{bmatrix}e^{xa} & \\ & e^{xa}\end{bmatrix}\cdot R_{xb} = e^{xa}\cdot\begin{bmatrix}\cos(xb) & \sin(xb)\\ -\sin(xb) & \cos(xb)\end{bmatrix} \Rightarrow \text{OP: } y(x) = e^{xA}\cdot c,\ c\in\mathbb{R}^2$$

$$\circledast = \begin{bmatrix} e^{xa} & \\ & e^{xa} \end{bmatrix} \cdot R_{xb} = e^{xa} \cdot \begin{bmatrix} \cos(xb) & \sin(xb) \\ -\sin(xb) & \cos(xb) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ОР}: Y(x) = e^{xA} \cdot c,\ c \in \mathbb{R}^2$$

по б)

Решавање ЛСДЈКК сводјени матрицу на Жорданову нормалну форму

$$Y' = AY \rightsquigarrow e^{xA}$$

$A \sim J$, $A = T \cdot J \cdot T^{-1}$

J – у Жордановој н. форми

T – матрица прелаза

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_k} \end{bmatrix}$$

блокови

блок-дијагонална

Шта могу бити B_k?

1) $\lambda \in \mathbb{R}$ сопс. вр.
$$B_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

сгеу: $[\lambda]$

дијагонална: $J = \begin{bmatrix} [\lambda_1] & \\ & [\lambda_2] \end{bmatrix}$

2) $\alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ сопс. вр.

$$B_k = \begin{bmatrix} \boxed{R} & \boxed{E} & & \\ & \boxed{R} & \boxed{E} & \\ & & \ddots & \boxed{E} \\ & & & \boxed{R} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A = T \cdot J \cdot T^{-1}$$

$$\text{ОР}: Y(x) = e^{xA} \cdot c = e^{x(TJT^{-1})} \cdot c = T \cdot e^{xJ} \cdot T^{-1} \cdot c,\quad c \in \mathbb{R}^n$$

можемо лакше да нађемо!

зад ④ са пр. часа