Линеарни системи ДЈ са константним коефицијентима (ЛСДЈКК)

$y' = Ay$ (*) $\quad A \in M_n(\mathbb{R})$

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad , \quad y(t), y'(t) \in \mathbb{R}^n$

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – линеарно независна решења система (*) = фундаментални скуп решења

$$\varphi_j' = A\varphi_j$$

$\Phi(x) = [\varphi_1(x)\downarrow \ \dots \ \varphi_n(x)\downarrow]_{n\times n}$ = фундаментална матрица

$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(x) = \det \Phi(x)$ = Вронскијан

$W(x) \neq 0 \Leftrightarrow$ решења су лин. независна

$\Phi(x)$ фундаментална $\Leftrightarrow \underbrace{\Phi'(x) = A \cdot \Phi(x)}_{\text{колоне су решења}} \wedge W(x) \neq 0$

ОР: $y(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) \quad , \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

$= \Phi(x) \cdot c \qquad c \in \mathbb{R}^n$

Ојлерова метода

идеја: $y' = Ay$

λ – сопс. вр. од A

v – сопс. век. од A $\quad (Av = \lambda v \ , \ v \neq 0)$

$\varphi(x) = e^{\lambda x} \cdot v$ решење система $y' = Ay$

$\varphi'(x) = (e^{\lambda x} \cdot v)' = \lambda e^{\lambda x} \cdot v =$

$= e^{\lambda x} \cdot (\lambda v) = e^{\lambda x} \cdot (Av) =$

$= A \cdot (e^{\lambda x} \cdot v) = A \cdot \varphi(x)$

① (реалне и различите сопс. вр.)

$y_1' = 5y_1 + 4y_2$

$y_2' = 4y_1 + 5y_2$

$E = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} = E_n = I = Id = id$

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad , \quad y' = A \cdot y \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad Y' = A\cdot Y, \quad A=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

сопс. вр: $\det(A-\lambda E)=0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)^2 - 4^2 = 0$$

$$(1-\lambda)(9-\lambda)=0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 9$$

сопс. век: $\underline{\lambda_1 = 1}$

$$(A-\lambda_1 E)\cdot \gamma_1 = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4a+4b=0 \\ \cancel{4a+4b=0} \end{array}\right\} \quad b=-a \quad \text{нпр. } a=1 \qquad \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}\gamma_1 = e^x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x \\ -e^x \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 9}$

$$(A-\lambda_2 E)\gamma_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{l} -4a+4b=0 \\ \cancel{4a-4b=0} \end{array} \Rightarrow b=a \quad \text{нпр. } a=1 \qquad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x}\gamma_2 = e^{9x}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{9x} \\ e^{9x} \end{bmatrix}.$$

→ у овом случају су решења увек линеарно независна $(W(x) \neq 0)$

$$\Rightarrow \text{ОР: } Y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = c_1\cdot\begin{bmatrix} e^x \\ -e^x \end{bmatrix} + c_2\cdot\begin{bmatrix} e^{9x} \\ e^{9x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^x + c_2e^{9x} \\ -c_1e^x + c_2e^{9x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{\varphi_1(x)}{e^x} & \overset{\varphi_2(x)}{e^{9x}} \\ -e^x & e^{9x} \end{bmatrix}}_{\Phi(x)}\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_1(x) = c_1e^x + c_2e^{9x}$$

$$y_2(x) = -c_1e^x + c_2e^{9x}$$

② (комплексне и различите сопс. вр.)

$y_1' = 2y_1 + y_2$

$y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3$

$y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3$

$$y' = Ay \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

соп. ур: $\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \\ -1 & 2 \end{matrix} = 0$

$$(2-\lambda)(3-\lambda)^2 + 1\cdot(-1)^2 + 0\cdot 1\cdot 2 - (-1)\cdot(3-\lambda)\cdot 0 - 2\cdot(-1)\cdot(2-\lambda) - (3-\lambda)\cdot 1^2 = 0$$

$$(2-\lambda)(9-6\lambda+\lambda^2) + \underbrace{1 + 2(2-\lambda) - 3 + \lambda}_{2-\lambda} = 0$$

$$(2-\lambda)(\underbrace{9-6\lambda+\lambda^2+1}) = 0$$

$D = (-6)^2 - 4\cdot 10\cdot 1 = 36 - 40 = -4 < 0$ $\quad [\sqrt{-4} \times]$

$$\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_{2/3} = \frac{6 \pm i\cdot 2}{2} = 3 \pm i \qquad (\lambda_3 = \overline{\lambda_2})$$

соп. век: $\underline{\lambda_1 = 2}$: $(A - \lambda_1 E)\gamma_1 = 0$

$$\ldots \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \varphi_1(x) = e^{2x} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ e^{2x} \end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda_{2/3} = 3 \pm i}$:

изаберемо $\lambda_2 = 3+i$ $\qquad (A - \lambda_2 E)\gamma_2 = 0$ $\quad \gamma_2 \in \mathbb{C}^3$ $\quad \to$ само тражимо γ_2

$(A - \lambda_2 E)\gamma_2 = 0$

$(A - \lambda_3 E)\gamma_3 = 0$

$\lambda_3 = \overline{\lambda_2} \Rightarrow \gamma_3 = \overline{\gamma_2}$

$$\begin{bmatrix} \overset{-1-i}{2-(3+i)} & 1 & 0 \\ 1 & \overset{-i}{3-(3+i)} & -1 \\ -1 & 2 & \overset{-i}{3-(3+i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} (-1-i)a + \boxed{b} &= 0 \\ a - ib - c &= 0 \\ -a + 2b - ic &= 0 \end{aligned}\right\} \quad /\cdot i \quad /\cdot(-2)$$

$(-1-i)a + b = 0$

$\overset{2-i}{(-i+1+1)}a - \boxed{c} = 0 \quad /\cdot(-i)$

$$\overset{2-i}{(-i+1+1)}a-\boxed{c}=0 \quad /\cdot(-i)$$

$$\overset{1+2i}{(2+2i-1)}a-ic=0$$

$$(-1-i)a+b=0 \quad\Rightarrow\quad b=(1+i)a$$

$$(2-i)a-c=0 \quad\Rightarrow\quad c=(2-i)a \qquad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a \\ (1+i)a \\ (2-i)a \end{bmatrix}$$

$$\cancel{(\underbrace{-2i-1+1+2i}_{0})a=0} \quad (0\cdot a=0 \ \checkmark) \qquad a\in\mathbb{C}$$

$$\underset{a=1}{\gamma_2}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}$$

$$\Psi(x)=e^{\lambda_2 x}\gamma_2=e^{(3+i)x}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}=e^{3x}\cdot(\cos x+i\sin x)\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}$$

$$\varphi_2(x)=\mathrm{Re}(\Psi(x))=e^{3x}\cdot\begin{bmatrix} \cos x \\ \cos x-\sin x \\ 2\cos x+\sin x \end{bmatrix} \qquad \varphi_3(x)=\mathrm{Im}(\Psi(x))=e^{3x}\cdot\begin{bmatrix} \sin x \\ \sin x+\cos x \\ 2\sin x-\cos x \end{bmatrix}$$

ОР: $y(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+c_3\varphi_3(x)$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$

- и овде ће увек решења бити лин. нез. (кад год имамо разл. сопст. вр.) $W(x)\neq 0$

(случај поновљене реалне сопст. вр.)

$\lambda\in\mathbb{R}$ сопст. вр. од A вишеструкости k

$n=\dim A$, $r=\mathrm{rang}(A-\lambda E)$, $m=n-r$ → говори колико лин. нез. решења система $(A-\lambda E)\gamma=0$ имамо

1) $m=k$, имамо k решења система $(A-\lambda E)\gamma=0$: $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ - сопст. век за λ ⇝ $\varphi_j(x)=e^{\lambda x}\cdot\gamma_j$, $1\le j\le k$

2) $m<k$, решења тражимо у облику $\varphi(x)=\boxed{P_{k-m}[x]}\cdot e^{\lambda x}$ → вектор полинома степена $\le k-m$

→ треба наћи k лин. нез. решења

③ (случај $m=k$)

$$y_1'=2y_1-y_2-y_3$$
$$y_2'=3y_1-2y_2-3y_3$$
$$y_3'=-y_1+y_2+2y_3$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=1$$

$$y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3 \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$\underline{\lambda_1 = 0}$

$$(A - \lambda_1 E)\gamma_1 = 0 \ \dots \quad \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} \cdot \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda_2 = \lambda_3 = 1}$

$k = 2$

$$n = \dim A = 3$$

$$r = \operatorname{rang}(A - \lambda_2 E) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \ /\cdot(-3) \ /\cdot 1 \ = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$m = n - r = 3 - 1 = 2 \quad \Rightarrow k = m$$

$$(A - \lambda_2 E)\gamma = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \rightsquigarrow a - b - c = 0 \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a-b \end{bmatrix} = a\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\gamma_2} + b\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=\gamma_3}$$

$$c = a - b$$

$$\varphi_2(x) = e^{\lambda_2} \gamma_2 = e^{x}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x} \\ 0 \\ e^{x} \end{bmatrix} \qquad \varphi_3(x) = e^{\lambda_2 x}\gamma_3 = e^{x}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{x} \\ -e^{x} \end{bmatrix}$$

nezavisnost:
$$W(x) = \det([\varphi_1\!\downarrow \ \ \varphi_2\!\downarrow \ \ \varphi_3\!\downarrow]) = \begin{vmatrix} 1 & e^{x} & 0 \\ 3 & 0 & e^{x} \\ -1 & e^{x} & -e^{x} \end{vmatrix} = -e^{2x} - e^{2x} + 3e^{2x} = e^{2x} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{OR: } \ y(x) = \begin{bmatrix} 1 & e^{x} & 0 \\ 3 & 0 & e^{x} \\ -1 & e^{x} & -e^{x} \end{bmatrix} \cdot c, \quad c \in \mathbb{R}^3$$

4 (slučaj $m < k$)

$$y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3$$
$$y_2' = 2y_1 - y_2 - 2y_3$$
$$y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3 \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$k = 3$

$n = \dim A = 3$

$$r = \operatorname{rang}(A - E) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$n = \dim A = 3$

$r = \operatorname{rang}(A - E) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1$

$m = n - r = 3 - 1 = 2 < 3 = k$

решења тражимо у облику: $\varphi(x) = P_{k-m}[x]\cdot e^{\lambda_1 x} = e^x \cdot P_1[x] = e^x \cdot \begin{bmatrix} a_1x+b_1 \\ a_2x+b_2 \\ a_3x+b_3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \varphi' = A\varphi$

$$\cancel{e^x}\cdot \begin{bmatrix} a_1x+a_1+b_1 \\ a_2x+a_2+b_2 \\ a_3x+a_3+b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot \cancel{e^x}\cdot \begin{bmatrix} a_1x+b_1 \\ a_2x+b_2 \\ a_3x+b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1x+a_1+b_1 &= (2a_1-a_2-a_3)x + (2b_1-b_2-b_3) \\ a_2x+a_2+b_2 &= (2a_1-a_2-2a_3)x + (2b_1-b_2-2b_3) \qquad , \forall x \in \mathbb{R} \\ a_3x+a_3+b_3 &= (-a_1+a_2+2a_3)x + (-b_1+b_2+2b_3) \end{aligned}$$

$\cdot(-1)$ $\cdot 2$

$a_1 - a_2 - a_3 = 0$

$\cancel{2a_1 - 2a_2 - 2a_3 = 0}$

$\cancel{-a_1 + a_2 + a_3 = 0}$

$a_1 = b_1 - b_2 - b_3 \quad /\cdot 2 \quad /\cdot(-1)$

$a_2 = 2b_1 - 2b_2 - 2b_3$

$a_3 = -b_1 + b_2 + b_3$

$\rightsquigarrow$ 3 решења = 3 параметра

$\cancel{a_1 - a_2 - a_3 = 0}$ $\leftarrow$ $\begin{cases} 2a_1 = a_2 \\ -a_1 = a_3 \end{cases}$

b_1, b_2, b_3 параметри (a_1, a_2, a_3 преко њих)

$$\varphi(x) = e^{\lambda_1 x}\cdot P_1[x] = e^x \cdot \begin{bmatrix} (b_1-b_2-b_3)x+b_1 \\ (2b_1-2b_2-2b_3)x+b_2 \\ (-b_1+b_2+b_3)x+b_3 \end{bmatrix} = b_1\cdot \underbrace{e^x\cdot\begin{bmatrix} x+1 \\ 2x \\ -x \end{bmatrix}}_{\varphi_1(x)} + b_2\cdot \underbrace{e^x\cdot\begin{bmatrix} -x \\ -2x+1 \\ x \end{bmatrix}}_{\varphi_2(x)} + b_3\cdot \underbrace{e^x\cdot\begin{bmatrix} -x \\ -2x \\ x+1 \end{bmatrix}}_{\varphi_3(x)}$$

независности? $W(x) = \det\left(e^x\cdot\begin{bmatrix} x+1 & -x & -x \\ 2x & -2x+1 & -2x \\ -x & x & x+1 \end{bmatrix}\right) =$

$= e^{3x}\cdot\left((x+1)^2(-2x+1) - 2x^3 - 2x^3 - x^2(-2x+1) + 2x^2(x+1) + 2x^2(x+1)\right) =$

$= e^{\cdots} \cdot \Big((x+1)^2(-2x+1) - 2x \ldots$

$= e^{3x} \cdot \Big((x^2+2x+1)(-2x+1) - 2x^3 - 2x^3 + 2x^3 - x^2 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 + 2x^2\Big) =$

$= e^{3x} \cdot \Big(-2x^3 + x^2 - 4x^2 + 2x - 2x + 1 + 3x^2 + 2x^3\Big) =$

$= e^{3x} \neq 0$

ОР: $y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Напомена: Ако имамо $\lambda \in \mathbb{C}$ која је вишеструка, исти је поступак као у ③ и ④, пратити задатак ② (Re и Im)

НЕЋЕМО РАДИТИ!