12 - петак 20.05.2022.

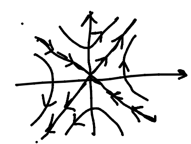
① Скицирати фп дс $x'=y$

$y'=x-x^3$

еквилибријуми: $y=0,\ x-x^3=0 \Rightarrow X_1^*=(0,0),\ X_2^*=(-1,0),\ X_3^*=(1,0)$

$$F(x,y)=\begin{bmatrix} y \\ x-x^3 \end{bmatrix}, \quad dF(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$dF(X_1^*)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1=1, \lambda_2=-1$ (седло) $\xrightarrow{\text{по T}}$ нелин. сист. је такође седло



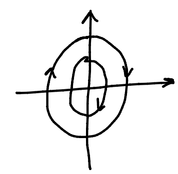
$dF(X_2^*)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(центар)

$\lambda_{1/2}=\pm 2i$ X ⟶ испоставља се да је нелин. систем такође центар

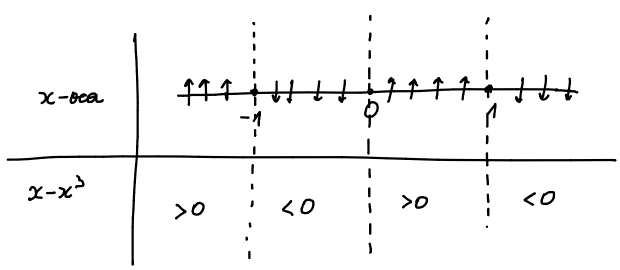
$Re(\lambda_{1/2})=0$

$dF(X_3^*)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$



изоклине: x-нула изоклина $\Rightarrow x'=0 \Rightarrow y=0 \to x$-оса, кретање ↑ или ↓

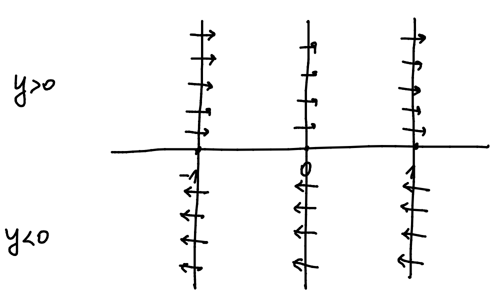
$y'>0$ $\quad y'<0$

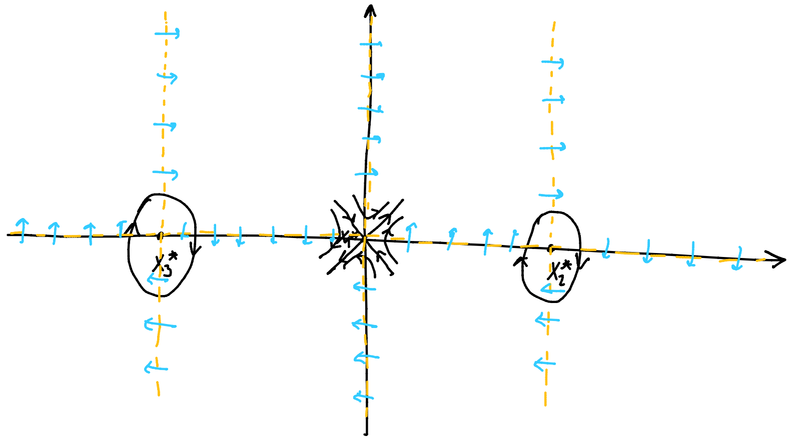


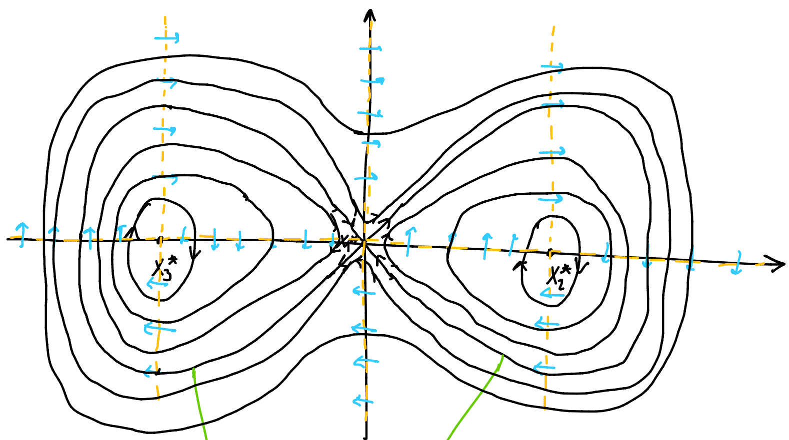
y-нула изоклина $\Rightarrow y'=0 \Rightarrow x-x^3=0 \rightsquigarrow x=-1, x=0, x=1$ ⟶ кретање → или ←

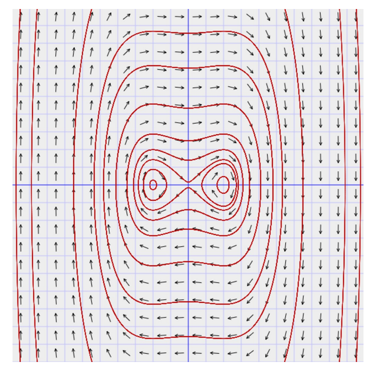
унија 3 праве

$x'>0$ $\quad x'<0$





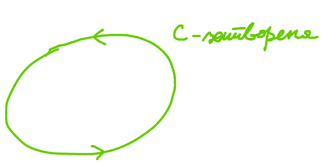


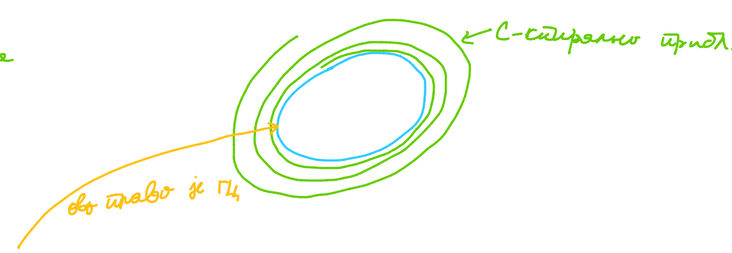


хомоклиничне трајекторије

$\boxed{T}$ (Поенкаре - Бендиксон)

Нека је R затворен и ограничен подскуп равни $\mathbb{R}^2$ који не садржи еквилибријуме ДС $X'=F(X)$, $F\in C^1(E)$, $R\subseteq E$. Нека постоји трајекторија C која је у почетном тренутку t_0 у тачки из R и остаје у R за $t\geq t_0$. Тада је C затворена трајекторија или трајекторија која се спирално приближава затвореној када $t\to+\infty$.





② Испитати егзистенцију граничног циклуса ДС.

$$x' = x - y - x^3$$
$$y' = x + y - y^3$$

идеја: прећи у поларне координате и посматрати појас $1\leq r\leq\sqrt{2}$.

$x(t), y(t) \rightsquigarrow r(t), \theta(t)$

$$x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$$
$$y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$$

$$x' = r'\cos\theta + r(-\sin\theta)\theta' \quad /\cdot\cos\theta \qquad\qquad x' = x - y - x^3 = r\cos\theta - r\sin\theta - r^3\cos^3\theta$$
$$y' = r'\sin\theta + r\cos\theta\,\theta' \quad /\cdot\sin\theta \qquad\qquad y' = x + y - y^3 = r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\sin^3\theta$$

$$x'\cos\theta + y'\sin\theta = r'\cos^2\theta + r'\sin^2\theta = r'$$

$$\Rightarrow r' = r\cos^2\theta - r\sin\theta\cos\theta - r^3\cos^4\theta + r\cos\theta\sin\theta + r\sin^2\theta - r^3\sin^4\theta = r - r^3(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$$

$$r\cos\theta\,\theta' = y' - r'\sin\theta = r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\sin^3\theta - r\sin\theta + r^3(\sin^5\theta + \sin\theta\cos^4\theta)$$

$$-r^3\sin^3\theta(1-\sin^2\theta) = -r^3\sin^3\theta\cos^2\theta$$

$$r\cos\theta\,\theta' = r\cos\theta - r^3\sin^3\theta\cos^2\theta + r^3\sin\theta\cos^4\theta$$

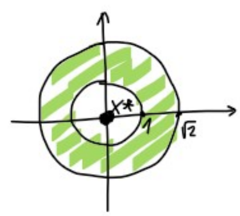
$$\left.\begin{aligned} r' &= r - r^3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ \theta' &= 1 - r^2\sin^3\theta\cos\theta + r^2\sin\theta\cos^3\theta \end{aligned}\right\}$$

$$R = \{(r,\theta) \mid 1 \le r \le \sqrt{2}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad R = f^{-1}([1,2])$$

$\Rightarrow R$ затворен

R-ограничен, $\operatorname{diam} R = 2\sqrt{2}$.



еквилибриуми: $\quad r = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ ✓

$$\left.\begin{aligned} r \ne 0: \quad & r - r^3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) = 0 \quad /:r && \Rightarrow r^2(\sin^4\theta + \cos^4\theta) = 1 \\ & 1 - r^2\sin^3\theta\cos\theta + r^2\sin\theta\cos^3\theta = 0 && \Rightarrow r^2\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = -1 \end{aligned}\right\} :$$

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = \sin\theta\cos\theta(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}\cdot(-\cos 2\theta)$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta$$

$$1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4\theta}{2} = -\frac{1}{4}\sin 4\theta$$

$$\frac{3}{4} + \frac{\cos 4\theta}{4} = -\frac{1}{4}\sin 4\theta \quad /\cdot 4$$

$$\sin^2 2\theta = \frac{1-\cos 4\theta}{2}$$

$$\underbrace{\sin 4\theta + \cos 4\theta}_{\in[-2,2]} = -3 \quad ↯$$

$\Rightarrow R$ нема еквилибриуми

$\in[-2,2]$

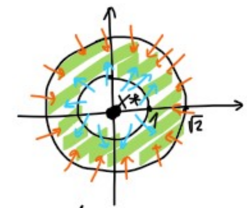
$\Rightarrow$ R нема еквилибријума

$$r=1: \quad \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=1} = 1-(\sin^4\theta+\cos^4\theta) = 1-\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right) = \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \geq 0$$

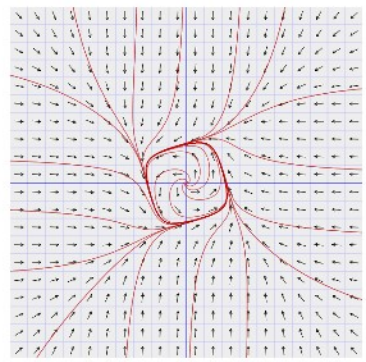
$$r' = r - r^3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$$

$$r=\sqrt{2}: \quad \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=\sqrt{2}} = \sqrt{2}-2\sqrt{2}(\sin^4\theta+\cos^4\theta) = \sqrt{2}-2\sqrt{2}\left(1-\frac{\sin^2 2\theta}{2}\right) =$$

$$= -\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin^2 2\theta = \sqrt{2}\,(-1+\underbrace{\sin^2 2\theta}_{\in[0,1]}) < 0$$



трајекторија не може да побегне из R



$\overset{\text{П-Б}}{\Longrightarrow}$ у R имамо гранични циклус

Дулаков критеријум: Нека је $X'=F(X)$, $F=(f,g)\in C^1(E)$, $E\subseteq\mathbb{R}^2$ је просто повезана (без рупа). Ако постоји $v\in C^1(E)$ т.д. $\mathrm{div}(v\cdot F) = \frac{\partial}{\partial x}(v\cdot f)+\frac{\partial}{\partial y}(v\cdot g)$ не мења знак на E, онда $X'=F(X)$ нема затворених трајекторија у E.

③ Доказати да д.с. немају затворених трајекторија:

а) $x' = x^2y^2+1$, $y' = xy^3+x$

б) $x' = y^2$, $y' = x$

а) $E=\mathbb{R}^2$ (по потреби ћемо смањити)

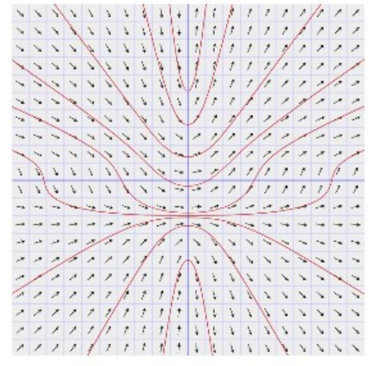
$v=?$

$$S = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\cdot(x^2y^2+1)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\cdot(xy^3+x)\right) \neq 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\underbrace{(x^2y^2+1)}_{>0} + v\cdot 2xy^2 + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\underbrace{(xy^3+x)}_{?} + v\cdot 3xy^2 \neq 0$$

$v\cdot 5xy^2$

ово склонити



$v(x,y)=v(x)$

$v(x)\cdot x>0$?

$v(x)=x$: $S = 1\cdot(x^2y^2+1)+5x^2y^2 = 6x^2y^2+1>0 \overset{\text{ДК}}{\Longrightarrow}$ нема затв. трај.

$v(x)\cdot x > 0$:

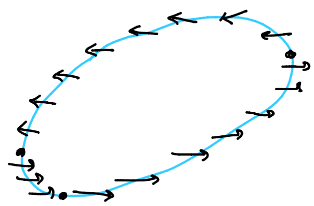
$\underset{\in C^1(\mathbb{R}^2)}{v(x) = x}$: $S = 1\cdot(x^2y^2+1) + 5x^2y^2 = 6x^2y^2+1 > 0 \xRightarrow{ДК}$ нема затв. трај.

б) $\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 v\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x v\right) = y^2 \frac{\partial v}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial y}$

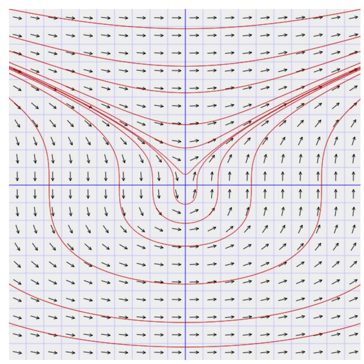
↳ тешко, али можда може

$x' = y^2$

$y' = x$



x' мора да мења знак (да идемо $\rightarrow$ па $\leftarrow$) јер иначе је $x' \geq 0$, а онда трајекторија није периодична.



$x' = y^2 \geq 0$ ↯

⊛ гранични проблем и Гринова функција → погледати предавања