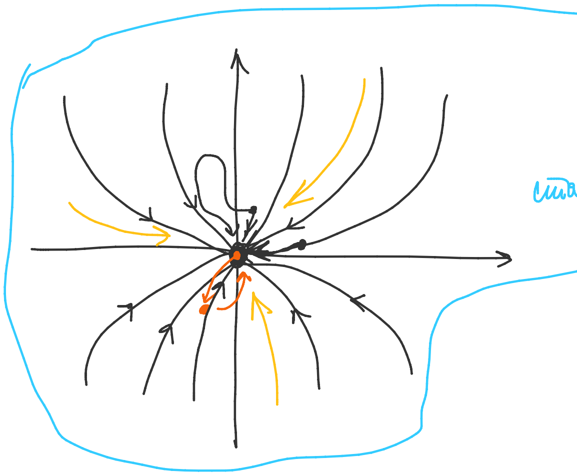
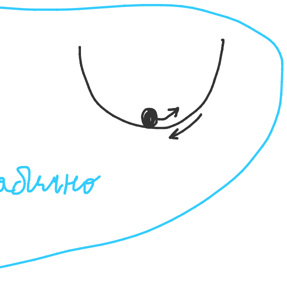
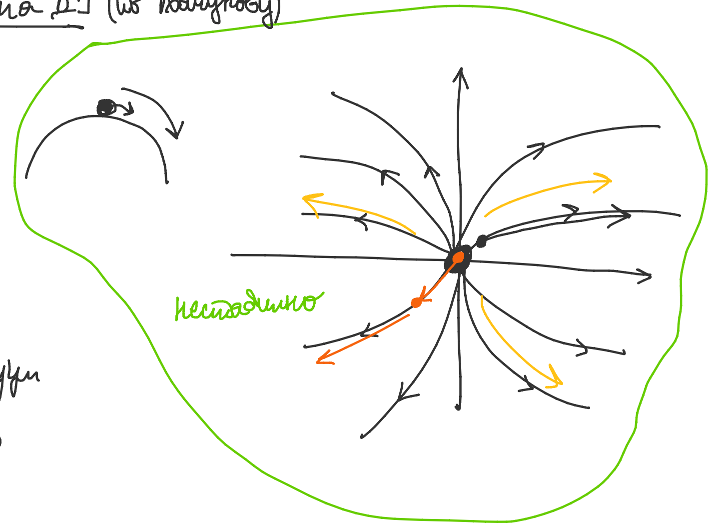
Стабилност еквилибријума ДЈ (по Љапунову)



$X^* = X_*$ - еквилибријум

$X' = F(X)$, $F(X^*) = 0$

Деф. Еквилибријум X^* је:

1) стабилан, ако $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall X(t)$ решење, $X(t_0)=X_0)$ $\|X_0 - X^*\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X^*\| < \varepsilon$, $\forall t \geq T$

2) нестабилан, ако није стабилан

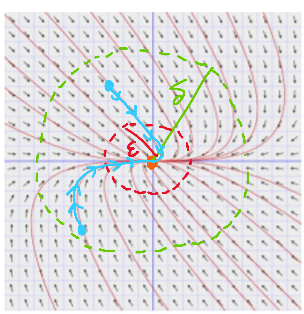
3) асимптотски стабилан, ако је стабилан и $(\exists \delta > 0)$ $\|X_0 - X^*\| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} X(t) = X^*$.

1. Скицирати фазне портрете динамичких система, а затим по деф. испитати стабилност њихових еквилибријума:

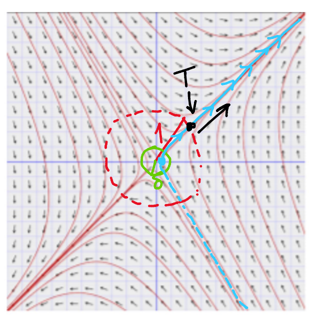
а) $x_1' = -x_1 + 2x_2$, $x_2' = -3x_2$

б) $x_1' = -x_1 + 3x_2$, $x_2' = 5x_1 - 3x_2$

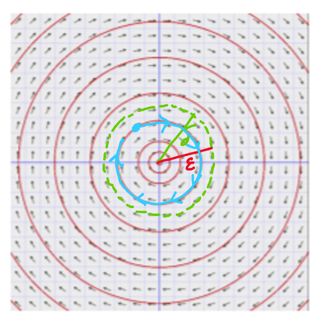
в) $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$.



стабилан чвор



седло



центар

а) $\delta = \varepsilon$

$X_0 \in B((0,0);\delta) \Rightarrow X(t) \in B((0,0);\delta)$, $\forall t \geq 0$

стабилан, да ли је асимптотски ст.? ✓ $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = (0,0)$

б) $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists X(t)$ решење, $X(t_0) = X_0)$ $\|X_0 - X^*\| < \delta \wedge \|X(t) - X^*\| \geq \varepsilon$, за неко $t \geq T$

$\varepsilon = 1$ $\|X(t_0)\| < \delta$ (право)

$\exists T>0,\ \forall t\geq T,\ \|X(t)\|\geq 1$ нестабилан

в) $\delta=\varepsilon$

$\|X(t)\|=\|X_0\|,\ \forall t \Rightarrow \|X(t)\|=\|X_0\|<\delta=\varepsilon \Rightarrow$ стабилан

да ли је АС? није! $\lim\limits_{t\to\infty} X(t)=X^*=(0,0) \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\|X(t)\|=0$ ↯ $(=\|X_0\|)$

домаћи: доказати и одредити (решити системе)

$\boxed{\text{I}}$ (Прва Т Љапунова, метод сопс. вр.)

$$X'=F(X),\quad A=dF(X^*)$$

1) Свака сопс. вр. λ од A има $Re(\lambda)<0 \Rightarrow X^*$ асимптотски стабилан

2) Ако $\exists\lambda$ сопс. вр. од A тд. $Re(\lambda)>0 \Rightarrow X^*$ нестабилан

$$X'=F(X) \rightsquigarrow X'=AX,\quad A=dF(X^*)$$

$F=(F_1,\dots,F_n)$

$X=(x_1,\dots,x_n)$

$$dF(X^*)=\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(X^*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(X^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(X^*) & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X^*) \end{bmatrix}$$

2. Испитати стабилност еквилибријума из задатка 1 помоћу теореме Љапунова о сопственим вредностима.

$X'=AX=F(X)$

$$F(X)=A\cdot X \Rightarrow dF(X)=A \Rightarrow dF(X^*)=A$$

а) $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}$, $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-3$, $Re(\lambda_1)<0,\ Re(\lambda_2)<0 \Rightarrow X^*$ је АС

б) $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 5 & -3\end{bmatrix}$, $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-6$, $Re(\lambda_1)>0,\ Re(\lambda_2)<0 \Rightarrow X^*$ је нестабилан

в) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $\lambda_{1/2}=\pm i$, $Re(\lambda_{1/2})=0 \Rightarrow$ из Т не можемо закључити

3. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$\begin{aligned} x_1' &= e^{x_1}-e^{-3x_3}\\ x_2' &= 4x_3-3\sin(x_1+x_2)\\ x_3' &= \ln(1-3x_1+x_3), \end{aligned}$$

а затим испитати стабилност еквилибријума $X^*=(0,0,0)$.

$$F(x_1,x_2,x_3)=\big(\underbrace{e^{x_1}-e^{-3x_3}}_{F_1},\ \underbrace{4x_3-3\sin(x_1+x_2)}_{F_2},\ \underbrace{\ln(1-3x_1+x_3)}_{F_3}\big)$$

$F=0 \Rightarrow F_1=F_2=F_3=0 \Rightarrow$ $e^{x_1}-e^{-3x_3}=0 \rightsquigarrow e^{x_1}=e^{-3x_3} \rightsquigarrow x_1=-3x_3$

$4x_3-3\sin(x_1+x_2)=0$

$\ln(1-3x_1+x_3)=0 \rightsquigarrow 1-3x_1+x_3=1 \rightsquigarrow x_3=3x_1=3\cdot(-3x_3)=-9x_3 \Rightarrow x_3=0$

$\Rightarrow x_1=0$

$4\cdot 0-3\sin(0+x_2)=0 \Rightarrow \sin x_2=0 \rightsquigarrow x_2=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$X^*\in\{(0,k\pi,0)\mid k\in\mathbb{Z}\}$

$X^*=(0,0,0)$:

$A=dF(X^*)$

$$dF(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & 3e^{-3x_3} \\ -3\cos(x_1+x_2) & -3\cos(x_1+x_2) & 4 \\ \dfrac{-3}{1-3x_1+x_3} & 0 & \dfrac{1}{1-3x_1+x_3}\end{bmatrix}$$

$$dF(X^*)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1=-3,\quad \lambda_{2/3}=1\pm 3i$$

$Re(\lambda_1)=-3<0$

$Re(\lambda_{2/3})=1>0$ $\Rightarrow X^*$ је нестабилан

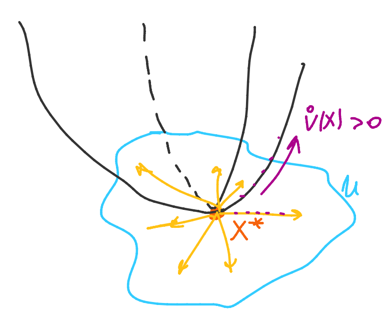
$\boxed{T}$ Нека је X^* еквилибријум система $X'=F(X)$. У некој околини $\mathcal{U}\ni X^*$ постоји ф-ја $V:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ т.д.

1) $V\in C^1(\mathcal{U})$

2) $V(X^*)=0$ и $V(X)>0,\ \forall X\in\mathcal{U}\setminus\{X^*\}$ (позитивно дефинитна)

3) Важи једна од следећих ствари:

- $\overset{\circ}{V}(X)\le 0,\ \forall X\in\mathcal{U}\setminus\{X^*\} \Rightarrow X^*$ стабилан
- $\overset{\circ}{V}(X)<0,\ \forall X\in\mathcal{U}\setminus\{X^*\} \Rightarrow X^*$ АС
- $\overset{\circ}{V}(X)>0,\ \forall X\in\mathcal{U}\setminus\{X^*\} \Rightarrow X^*$ нестабилан



$\overset{\circ}{V}(X)=\langle\nabla V(X),F(X)\rangle=\nabla V(X)\circ F(X)\to$ извод V дуж трајекторије

често: $V(X)=a_1x_1^2+\ldots+a_nx_n^2$
$a_1,\ldots,a_n>0$

V – функција Љапунова

4. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$x_1' = (x_3+1)(2x_2 - x_1)$$
$$x_2' = -(x_3+1)(x_1+x_2)$$
$$x_3' = -x_3^3,$$

а затим испитати њихову стабилност.

$$\left.\begin{aligned}(x_3+1)(2x_2-x_1) &= 0\\ -(x_3+1)(x_1+x_2) &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}2x_2 - x_1 &= 0\\ -x_1 - x_2 &= 0\end{aligned}\right\} \; x_1 = x_2 = 0$$

$$-x_3^3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$X^* = (0,0,0)$$

домаћи: методом сопс. вр. не добијамо одговор

$$V(x_1,x_2,x_3) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 \qquad , a_1, a_2, a_3 > 0$$

1) $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ✓ $\qquad \nabla V(x_1,x_2,x_3) = (2a_1x_1, 2a_2x_2, 2a_3x_3)$

2) $V(0,0,0) = 0$, $V(X) > 0$, $X \neq X^*$

3) $\overset{\circ}{V}(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle = 2a_1x_1 \cdot (x_3+1)(2x_2 - x_1) - 2a_2x_2(x_3+1)(x_1+x_2) + 2a_3x_3 \cdot (-x_3^3) =$

$$= (x_3+1)\left(4a_1x_1x_2 \underbrace{-2a_1x_1^2}_{\leq 0} - 2a_2x_1x_2 \underbrace{-2a_2x_2^2}_{\leq 0}\right) \underbrace{-2a_3x_3^4}_{\leq 0}$$

хоћемо околину $(0,0,0)$

$U = \{\|X\| < \frac{1}{2}\}$ и

ту је $x_3 + 1 > 0$

желимо $= 0 \Rightarrow 4a_1 - 2a_2 = 0$

нпр. $a_2 = 2, a_1 = 1, a_3 = 1$:

$$V(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

$$\overset{\circ}{V}(X) = (x_3+1)(-2x_1^2 - 4x_2^2) - 2x_3^4 \leq 0$$

за $X \neq X^*$: $\overset{\circ}{V}(X) < 0 \Rightarrow$ АС је X^*

5. Доказати да је координатни почетак стабилан, али не и асимптотски стабилан еквилибријум система $X' = AX$, где је $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0,0)$ система:

1)

2) а) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_1x_2^2 \\ -x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ б) $X' = AX + \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 \\ x_2^3 + x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ в) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$

3) Показати да је у сва три случаја матрица $dF(\mathbf{0})$ једнака и да метод сопствених вредности не даје одговор.

1), 3) – домаћи , 1) погледати 1в

3) добиће се $dF(0) = A$ у сва три случаја, погледати 2в

2) $X' = \begin{bmatrix} -x_2 & -x_1^3 - x_1x_2^2 \\ x_1 & -x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix} \swarrow F(X)$

$V(x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_2^2,\ a,b>0$ $\qquad \nabla V = (2ax_1,\ 2bx_2)$

1) $V \in C^1$

2) $V(X^*)=0,\ \ V(X)>0\ ,\ X\neq X^*$

3) $\mathring{V}(X) = 2ax_1\cdot(-x_2-x_1^3-x_1x_2^2)+2bx_2\cdot(x_1-x_2^3-x_1^2x_2) = \dots = \underbrace{-2ax_1^4}_{\le 0}\underbrace{-2bx_2^4}_{\le 0}\underbrace{-2(a+b)x_1^2x_2^2}_{\le 0}+\underbrace{x_1x_2(2b-2a)}_{?}$

$2b=2a$

$\underline{\underline{a=b}}$

нпр: $V(X)=x_1^2+x_2^2$

$\mathring{V}(X) = -2x_1^4-2x_2^4-4x_1^2x_2^2 = -2(x_1^2+x_2^2)^2<0\ ,\forall X\neq X^* \ \Rightarrow X^*$ је АС

б) $V(x_1,x_2) = x_1^2+x_2^2$

$\mathring{V}(X) = \dots = 2(x_1^2+x_2^2)^2 > 0\ ,\ \forall X\neq X^* \ \Rightarrow X^*$ је нестабилан

в) $V(x_1,x_2) = x_1^2+x_2^2$

$\mathring{V}(X) = \dots = 0 \le 0 \ \Rightarrow X^*$ је стабилан