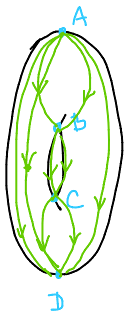
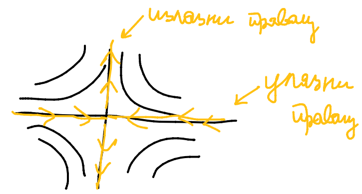
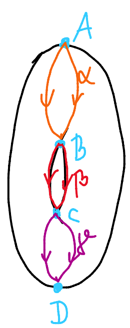
① Нацртати нег. град. ток фје висине на (вертикалном) торусу.
Шта су W^s и W^u еквилибријума?







$W^s(A) = \{A\}$

$W^u(A) = T^2 \setminus (\beta \cup \gamma)$

$W^s(B) = \alpha \setminus \{A\}$

$W^u(B) = \beta \setminus \{C\}$

$W^s(C) = \beta \setminus \{B\}$

$W^u(C) = \gamma \setminus \{D\}$

$W^s(D) = T^2 \setminus (\alpha \cup \beta)$

$W^u(D) = \{D\}$

Напомена: $\underline{\underline{A}}$

$W^s(A) = \{A\} \Rightarrow \dim = 0$

$W^u(A) = T^2 \setminus (\beta \cup \gamma) \Rightarrow \dim = 2$ index $(A) = 2$

$\underline{\underline{B}}$

$W^s(B) = \alpha \setminus \{A\} \Rightarrow \dim = 1$

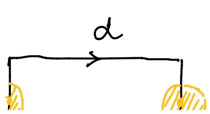
$W^u(B) = \beta \setminus \{C\} \Rightarrow \dim = 1$ index $(B) = 1$

погледајмо у Морсовој карти: $f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$

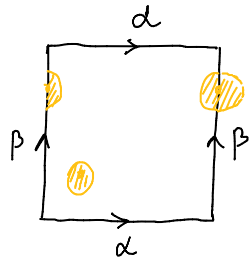
$$-\nabla f = (\underbrace{2x_1, \dots, 2x_k}_{\text{нестабилни правци}}, \underbrace{-2x_{k+1}, \dots, -2x_n}_{\text{стабилни правци}})$$

$\Rightarrow$ имамо k нестабилних праваца $\Rightarrow$ индекс = димензија нест. многостр.

② Посматрајмо торус као $T^2 = [0, \pi]^2 /_\sim$. Дата је $f : T^2 \to \mathbb{R}$,



$f(x,y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$



$f(x,y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$

$x,y \in [0,\pi]^2$

а) f добро деф. и глатка.

б) f Морсова.

в) Интерпретирати $-\nabla f$ ток.

а) $\sim$: $(x,0)\sim(x,\pi)$ (α)

$(0,y)\sim(\pi,y)$ (β)

$$f(x+\pi,y) = \underbrace{\sin(x+\pi)}_{-\sin x}\sin y\,\underbrace{\sin(x+\pi+y)}_{-\sin(x+y)} = \sin x \sin y \sin(x+y) = f(x,y)$$

$$f(x,y+\pi) = \dots = f(x,y)$$

↳ глаткост следи из π-пер. по x и y коорд. и глаткости $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y)$

б) дате су коорд. у карти $x,y\in[0,\pi]$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \dots = \sin y\cdot\sin(2x+y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \dots = \sin x\cdot\sin(2y+x) = 0$$

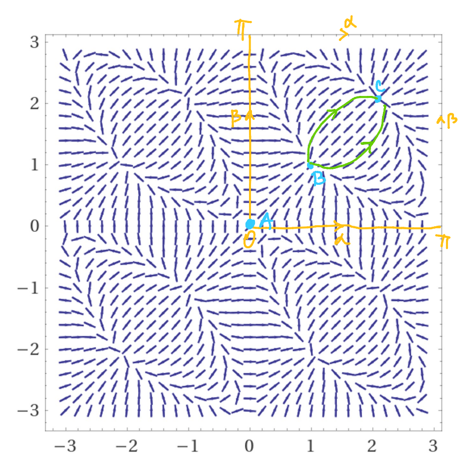
$\therefore$ три крит. тачке: $A=(0,0)$

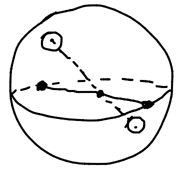
$B=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$

$C=\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$

домаћи: доказати да су A,B,C недегенерисане.

в) $-\nabla f(x,y) = \left(-\sin y\cdot\sin(2x+y),\ -\sin x\cdot\sin(2y+x)\right)$



(3) $\mathbb{R}P^2 \approx (\mathbb{R}^3\setminus\{0\})/(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \approx S^2/_{x\sim -x} \approx$  $\approx$  $\approx$ 

$$\mathbb{R}P^2 = \{[x:y:z] \mid \underbrace{(x,y,z)\in S^2}_{x^2+y^2+z^2=1},\ (x,y,z)\sim(-x,-y,-z)\}$$

$f([x:y:z]) = x^2+2y^2+3z^2$ – доказати да је Морсова

добра деф: $f([-x:-y:-z]) = (-x)^2+2(-y)^2+3(-z)^2 = x^2+2y^2+3z^2 = f([x:y:z])$

+глаткост: следи из симетрије

карте: $\mathcal{U}_1 = \{x\neq 0\}$

$\mathcal{U}_2 = \{y\neq 0\}$

$\mathcal{U}_3 = \{z\neq 0\}$

на $\mathcal{U}_1$: $\varphi_1(\underset{\mathbb{R}P^2\cap\,\mathcal{U}_1}{[x:y:z]}) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, $\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathbb{R}^2$, добро деф, хомеоморфизам $\Rightarrow \mathcal{U}_1 \approx \mathbb{R}^2$

$u = \frac{y}{x}$ $\qquad \varphi_1^{-1}(u,v) = [x : ux : vx] = \left[\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} : \frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}} : \frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\right]$

$v = \frac{z}{x}$ $\qquad x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow x^2(1+u^2+v^2)=1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$

$$g_1 = f\circ\varphi_1^{-1},\quad g_1(u,v) = f\left(\left[\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} : \frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}} : \frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\right]\right) = \frac{1+2u^2+3v^2}{1+u^2+v^2}$$

Крит. т. у $\mathcal{U}_1$: $\frac{\partial g_1}{\partial u} = \frac{\partial g_1}{\partial v} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial u} &= -\frac{2u(v^2-1)}{(u^2+v^2+1)^2} = 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial v} &= \frac{2(u^2+2)v}{(u^2+v^2+1)^2} = 0 \end{aligned}\right\}\ u=v=0 \rightsquigarrow [1:0:0]$$

$\mathrm{Hess}\, g_1(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow [1:0:0]$ је недегенерисана

домаћи: слично урадити у $\mathcal{U}_2$ и у $\mathcal{U}_3$

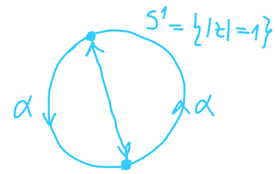
$\mathcal{U}_2 = \{y\neq 0\}$, $\varphi_2([x:y:z]) = \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$ крит. т.: $[0:1:0]$

домаћи: слично урадити у U_2 и у U_3

$$U_2 = \{y \neq 0\}, \quad \varphi_2([x:y:z]) = \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right), \text{ крит. т.: } [0:1:0]$$

$$U_3 = \{z \neq 0\}, \quad \varphi_3[x:y:z] = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \text{ крит. т.: } [0:0:1]$$

домаћи: $\mathbb{R}P^2 \approx D^2/e^{i\theta} \sim e^{i(\theta+\pi)}$



доказати да је $f(x,y) = 2x^2+y^2+1$ Морсова, $x,y \in D^2$

Решавање система методом првих интеграла

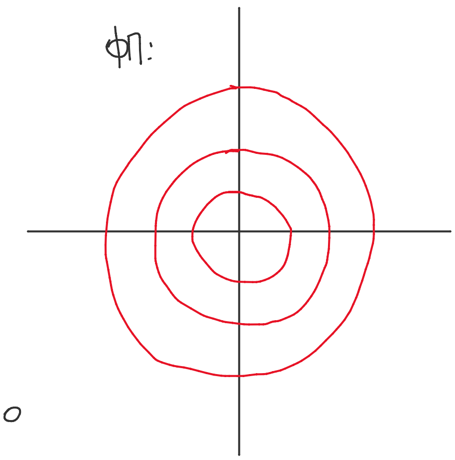
пр. $x_1' = x_2$
$x_2' = -x_1$

$$\begin{cases} x_1 = c_1\cos t + c_2 \sin t \\ x_2 = -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{cases}$$

експлицитно решење

имплицитно решење: $\underline{x_1^2 + x_2^2 = c}$, $c>0$

ФП:



Деф. Први интеграл система је фја ψ која је константна дуж решења.

$X \in \mathbb{R}^n$
$X' = F(X)$

аутономан (F не зависи експл. од t)

ОР: (у имплицитном облику)

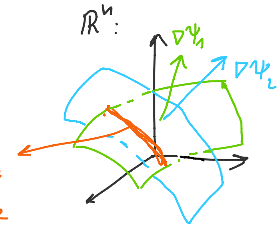
$\psi_1(x_1, \dots, x_n) = c_1$
$\psi_2(x_1, \dots, x_n) = c_2$
$\vdots$
$\psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = c_{n-1}$

$c_i \in \mathbb{R}$

$\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ - први интеграли
и потребно је да буду независни

→ желимо да се хиперповрши секу трансверзално
(M, $\operatorname{codim} M = 1 = n - \dim M$)

$\mathbb{R}^n$:



пресек је $\dim = n-2$
(ако се секу трансверзално)

$\psi_1 = c_1$ → одређује многострукост димензије $n-1$

$\psi_2 = c_2$ → -//-

први интеграли независни $\Leftrightarrow$ сви $\psi_1 = c_1, \dots \psi_{n-1} = c_{n-1}$ се секу трансверзално

$\Leftrightarrow$ $\nabla\psi_1, \dots, \nabla\psi_{n-1}$ у тачкама пресека независни

ако систем није аутономан: $X' = F(t, X)$, $X \in \mathbb{R}^n$

уведемо нову променљиву $u = t$

$$\left.\begin{aligned} X' &= F(u, X) \\ u' &= 1 \end{aligned}\right\}$$ аутономан, за 1 димензију већи

$\begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \to n$ првих интеграла

$\Rightarrow$ за неаутономан систем треба n „првих интеграла" (могу да зависе од t)

(4)
$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x + y^2 + t^2}{t} \\ y' &= \frac{y}{t} \end{aligned}\right\}$$ неаутономан дим $= 2$ $\rightsquigarrow$ 2 једначине $\psi_i = c_i$

$$\left(\frac{y'}{y} = \frac{1}{t}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t} \underset{\text{РП}}{\Rightarrow} \dots\; y = c_1 \cdot t \Rightarrow c_1 = \frac{y}{t} \qquad , \psi_1(t, x, y) = \frac{y}{t}$$

$$x' = \frac{x + t^2 \cdot c_1^2 + t^2}{t} = \frac{x}{t} + t \cdot (1 + c_1^2) \overset{\text{лин}}{\rightsquigarrow} x(t) = c_2 t + (1 + c_1^2) t^2$$

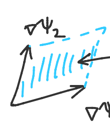
експлицитно решење:
$x(t) = c_2 t + (1 + c_1^2) t^2$
$y(t) = c_1 t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$x = c_2 t + t^2 + t^2 \cdot \frac{y^2}{t^2} = c_2 t + t^2 + y^2$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{x - t^2 - y^2}{t} \quad , \psi_2(t, x, y) = \frac{x - t^2 - y^2}{t}$$

$$\nabla\psi_1 = \left(-\frac{y}{t^2}, 0, \frac{1}{t}\right)$$

$$\nabla\psi_2 = \left(-\frac{x - y^2}{t^2} - 1, \frac{1}{t}, \frac{-2y}{t}\right)$$



$\|\nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2\| \neq 0$

$$\nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2 = \begin{vmatrix} -\frac{y}{t^2} & 0 & \frac{1}{t} \\ -\frac{x - y^2}{t^2} - 1 & \frac{1}{t} & \frac{-2y}{t} \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \underbrace{-\frac{1}{t^2}}_{\neq 0} \vec{i} + \frac{x + y^2 + t^2}{t^3} \vec{j} - \frac{y}{t^3} \vec{k} \Rightarrow \text{независни су}$$

ОР: $\frac{y}{t} = c_1$
$\frac{x - t^2 - y^2}{t} = c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$