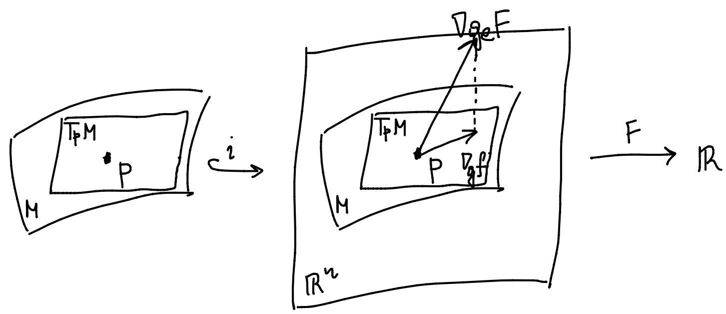
1. (а) Нека је Риманова метрика g на многострукости $M \subseteq \mathbb{R}^n$ наслеђена еуклидска метрика из $\mathbb{R}^n$ и нека је $f : M \to \mathbb{R}^n$ рестрикција функције амбијента $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = F|_M$. Доказати да је градијент $\nabla f(p)$ у тачки $p \in M$ индукован метриком g једнак ортогоналној пројекцији (стандардног) градијента $\nabla F(p)$ на тангентни простор T_pM.
(б) Доказати да су координате градијентног поља ∇f функције висине на сфери $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, $f = F|_{\mathbb{S}^2}$, $F(x, y, z) = z$ у тачки (x, y, z) једнаке $(-xz, -yz, x^2 + y^2)$.

а) $\mathbb{R}^n$, X, Y - век. поља

$p \in \mathbb{R}^n$ $\quad g_e(X_p, Y_p) = \langle X_p, Y_p \rangle$ на $\mathbb{R}^n$



$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f = F|_M : M \to \mathbb{R}$

X, Y - век. поља на M $\quad g(X_p, Y_p) = g_e(i_* X_p, i_* Y_p)$

$p \in M$

$$M \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^n \longrightarrow F, \qquad M \xrightarrow{f} F$$

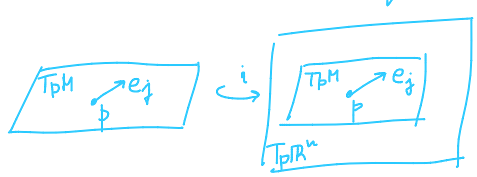
$f = F \circ i$

Градијенти: $\quad g_e(\nabla_{g_e} F, -) = dF(-)$ (*)

$g(\nabla_g f, -) = df(-)$ (*)

Нека је $\{e_i\}_{1 \le i \le n}$ ортонормирана база од $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. Онда је T_pM векторски потпростор (димензије $m = \dim M$), па можемо да узмемо базу $\{e_i\}_{1 \le i \le m}$.

$$\mathrm{proj}(\nabla_{g_e} F(p)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{g_e(e_j, \nabla_{g_e} F(p))}{\underbrace{g_e(e_j, e_j)}_{\|e_j\|^2 = 1}} \cdot e_j = \sum_{j=1}^{m} g_e(\nabla_{g_e} F(p), e_j) \cdot e_j \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{m} dF(e_j) \cdot e_j = \sum_{j=1}^{m} dF(i_* e_j) \cdot e_j =$$



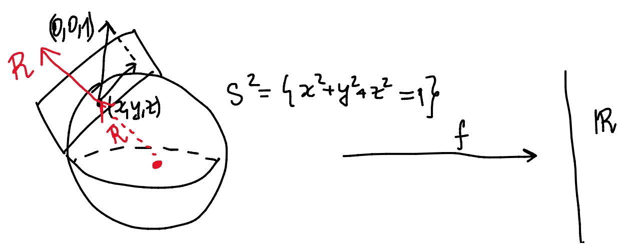
$i_* e_j = e_j$, $e_j \in T_pM$

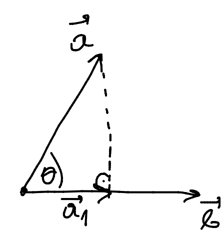
$\underbrace{di(e_j)}_{d(F \circ i) = df}$

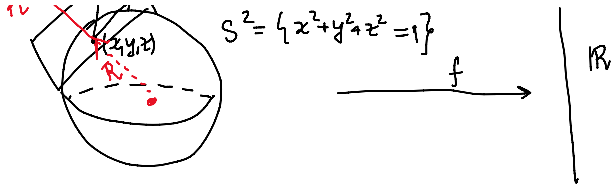
$$= \sum_{j=1}^{m} df(e_j) e_j \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{m} g(\nabla_g f, e_j) e_j =$$

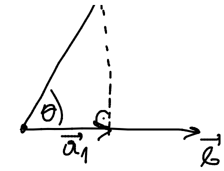
$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{g(\nabla_g f, e_j)}{g(e_j, e_j)} e_j = \nabla_g f(p)$$

б)









$F(x,y,z) = z\ ,\ f = F|_{S^2}$

$R(x,y,z) = (x,y,z)$
$(x,y,z) \in S^2$
$\Rightarrow \|(x,y,z)\| = 1$

$\vec{a}_1 = \mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \dfrac{\langle a,b\rangle}{\|b\|^2}\cdot \vec{b}$

$$\nabla f(x,y,z) = \mathrm{proj}\big(\underbrace{\nabla_{ge}F(x,y,z)}_{\nabla_{ge}(z)=(0,0,1)}\big) = \mathrm{proj}\,(0,0,1) = (0,0,1) - \mathrm{proj}_R(0,0,1) = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(x,y,z)\rangle}{\|(x,y,z)\|^2}\cdot(x,y,z) =$$
$$= (0,0,1) - z\cdot(x,y,z) = (-xz,-yz,1-z^2) = (-xz,-yz,x^2+y^2)$$

(2) Посматрајмо S^2 са функцијом висине $f: S^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z$ и негативни градијентни д.с.

$$\frac{d}{dt}\phi^t(x) = -\nabla f(\phi^t(x))\ ,\ \phi^0 = \mathrm{id} \quad \text{на } S^2.$$

а) Наћи све еквилибријуме од д.с.

б) Наћи све критичне тачке од f и одредити њихов индекс. Да ли је f Морсова ф-ја?

в) Скицирати $X = -\nabla f$ на S^2 и ФП овог д.с.

г) Одредити W^s и W^u за све еквилибријуме.

д) Одредити стабилност свих еквилибријума.

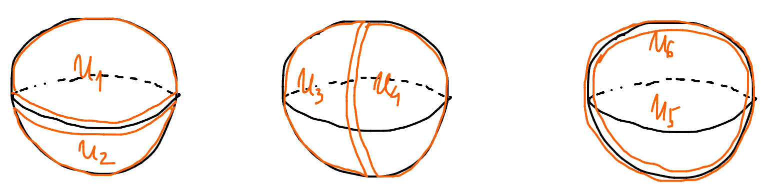
а) $X = -\nabla f = (xz, yz, -x^2-y^2)$

$X = \vec{0} \Rightarrow xz = yz = -x^2-y^2 = 0$
$\hookrightarrow x = y = 0 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$

$N = (0,0,1)$
$S = (0,0,-1)$

б) крит. т. $x \Leftrightarrow df(x) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow x$ еквилибријум д.с. $\Rightarrow N$ и S су критичне.

S^2 у картама гледамо:



$U_1 = \{z>0\}$
$U_2 = \{z<0\}$

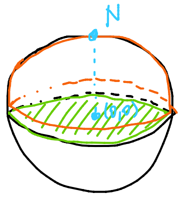
$U_3 = \{x<0\}$
$U_4 = \{x>0\}$

$U_5 = \{y>0\}$
$U_6 = \{y<0\}$

$U_j \approx D^2$

U_3, U_4, U_5, U_6 – немају крит. т. $\Rightarrow$ не рачунамо

U_1:



$$\underset{\substack{\cap \\ D^2}}{(u,v)} \xrightarrow{\varphi} \underset{\substack{\cap \\ S^2}}{(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})}$$

$$g : D^2 \xrightarrow{\varphi} S^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad g = f\circ\varphi$$

$$g(u,v) = f(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}) = \sqrt{1-u^2-v^2}$$

$$dg(u,v) = \nabla g(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & , & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{bmatrix}$$

$(u,v)=(0,0)$

$(dg = 0 \Rightarrow N$ је крит.$)$

$$d^2g(u,v) = \operatorname{Hess} g(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v^2-1}{(1-u^2-v^2)^{3/2}} & \frac{-2uv}{1-u^2-v^2} \\ \frac{-2uv}{1-u^2-v^2} & \frac{u^2-1}{(1-u^2-v^2)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

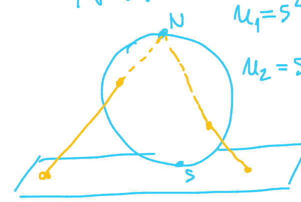
$$d^2g(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{index}(N) = 2$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

домаћи: урадити у картама из стереографске пројекције

$U_1 = S^2\setminus\{N\} \to \mathbb{R}^2$

$U_2 = S^2\setminus\{S\} \to \mathbb{R}^2$



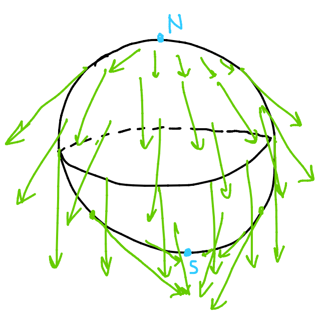
U_2: $g(u,v) = -\sqrt{1-u^2-v^2}$, $S \in U_2$ крит.

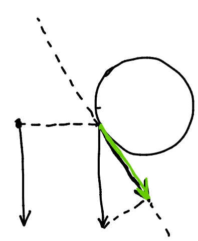
$$d^2g(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{index}(S) = -2$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

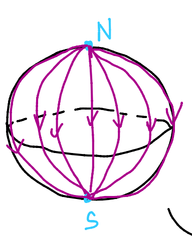
f Морсова $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Hess} g(N)$ и $\operatorname{Hess} g(S)$ недеген. матрице $\Leftrightarrow$ тачно

в)





$X = -\nabla f = (xz, yz, -x^2-y^2)$



$\vec{g}$ (гравитација)

дуж великих кругова

$\downarrow U$

дуж великих кругова

Г) $W^s(S) = S^2 \setminus \{N\}$ $\qquad$ $W^s(N) = \{N\}$

$W^u(S) = \{S\}$ $\qquad$ $W^u(N) = S^2 \setminus \{S\}$

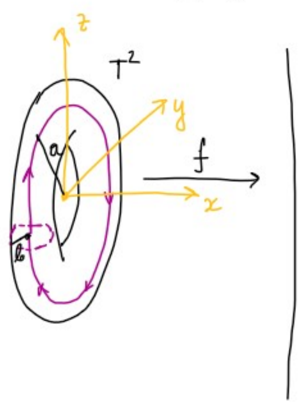
Д)

S је „стабилан чвор" $\Rightarrow$ S је AC

N је „нестабилан чвор" $\Rightarrow$ N је нест.

додатно: урадити исто за $S^n = \{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$

3. $T^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, вертикално постављен. $f(x,y,z) = z$ доказати да је Морсова на T^2.
↳ торус



$a > b > 0$

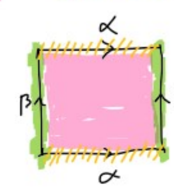
$$\varphi(u,v) = (b \sin u, (a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v), \quad \varphi : [0,2\pi]^2 \to T^2$$

$u \in [0, 2\pi)$

$v \in [0, 2\pi)$

Карте могу бити нпр.

$(0,2\pi)^2$ и $(-\varepsilon,\varepsilon) \times (-\varepsilon, 2\pi)$ и $(-\varepsilon, 2\pi) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$



али можемо само да рачунамо у $(0,2\pi)^2$.

$$g = f \circ \varphi^{-1} \Rightarrow g(u,v) = (a + b\cos u)\sin v$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v} = 0 \Rightarrow b \sin v \sin u = 0$$

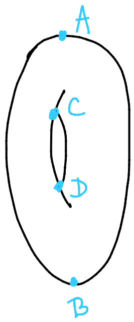
$$\underbrace{(a + b\cos u)}_{\neq 0}\cos v = 0$$

$$\cos v = 0 \Rightarrow \sin u = 0$$

$$(u,v) \in \{\underset{A}{(0, \tfrac{\pi}{2})}, \underset{B}{(0, \tfrac{3\pi}{2})}, \underset{C}{(\pi, \tfrac{\pi}{2})}, \underset{D}{(\pi, \tfrac{3\pi}{2})}\}$$

$$\mathrm{Hess}\, g(u,v) = \begin{bmatrix} -b\cos u \sin v & -b \sin u \cos v \\ \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Hess} g(u,v) = \begin{bmatrix} -b\cos u \sin v & -b\sin u \cos v \\ -b\sin u \cos v & -(a+b\cos u)\sin v \end{bmatrix}$$



$$A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & -a-b \end{bmatrix}, \quad B \rightsquigarrow \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix}, \quad C \rightsquigarrow \begin{bmatrix} b & 0 \\ a & -a+b \end{bmatrix}, \quad D \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow f$ је Морсова

$\operatorname{index}(A) = 2$

$\operatorname{index}(C) = \operatorname{index}(D) = 1$

$\operatorname{index}(B) = 0$

Задатак: Доказати да $f(x,y,z) = x$ није Морсова, а $f(x,y,z) = y$ јесте.