Многострукости ; ДЈ на њима ; Морсова теорија

① Дато је в.п. $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} = (-y, x, 0)$ у $\mathbb{R}^3$ и $P = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^4=1\}$

а) P је подмногострукост од $\mathbb{R}^3$

б) X је тангентно на P

в) Решити дј. (у $\mathbb{R}^3$) $\gamma' = X(\gamma)$, $\gamma(0) = (0,0,1)$ и доказати $\gamma(t)\in P$, $\forall t$

г) Решити дј. (у $\mathbb{R}^3$) $\gamma' = X(\gamma)$, $\gamma(0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$ и доказати $\gamma(t)\in P$, $\forall t$

а)

$\forall p\in P\ \exists\, \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^3$

$\mathcal{U}\cap P \approx \mathbb{R}^2$
↳ дифео

$\boxed{\text{T}}$ – ако је $f : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^{n-k}$ тд. је f субмерзија тд. $f^{-1}(0) = \mathcal{U}\cap P \Rightarrow P$ је подмногострукост од $\mathbb{R}^n$ димензије k

$n=3$
$k=2$ $\quad f : \underset{\subseteq \mathbb{R}^3}{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y,z) = x^2+y^2+z^4-1$. Очигледно је $f^{-1}(0) = \mathcal{U}\cap P$.

f је субмерзија? $(df)_p$ је сурјекција (као линеарно пресликавање)
↳ извод

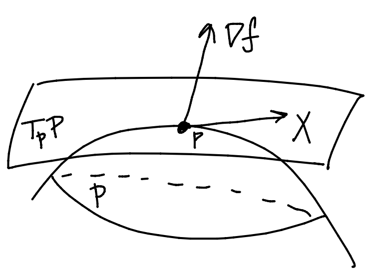
то значи да је линеарно пресликавање $(df)_p$ максималног ранга
када је кодомен $\mathbb{R}^1$ – то се сведе на то да је $\nabla f \neq \vec{0}$ на P

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \ \ \frac{\partial f}{\partial y} \ \ \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \nabla f$$

$(df)_p = (\nabla f)_p = (2x, 2y, 4z^3)_p = \vec{0} \Rightarrow x = y = z = 0$, али $(0,0,0)\notin P$

$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 4z^3)$

б)



$P = f^{-1}(0) \Rightarrow \nabla f \perp T_pP$

треба $\langle X, \nabla f\rangle = 0$

$\langle(-y, x, 0), (2x, 2y, 4z^3)\rangle = -2xy + 2xy + 0 = 0$ ✓

$\Rightarrow X$ је векторско поље на P

в) $\gamma' = X(\gamma)$

в) $\gamma' = X(\gamma)$

$$\gamma(t) = (u(t), v(t), w(t)) \qquad \left.\begin{aligned} u'(t) &= -v(t) \\ v'(t) &= u(t) \\ w'(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{ОР}: \quad \begin{aligned} u(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ v(t) &= c_2 \cos t - c_1 \sin t \\ w(t) &= c_3 \end{aligned}$$

$\gamma(0) = (0,0,1) \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ и $c_3 = 1$

$\gamma(t) = (0,0,1) \in P, \ \forall t$ (ФТ дин. система)

г) $\gamma(0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$

$$\left.\begin{aligned} &c_3 = 0,\ c_1 = \tfrac{3}{5},\ c_2 = \tfrac{4}{5} \Rightarrow \gamma(t) = \left(\tfrac{3}{5}\cos t + \tfrac{4}{5}\sin t,\ \tfrac{4}{5}\cos t - \tfrac{3}{5}\sin t,\ 0\right) \\ &\left(\tfrac{3}{5}\cos t + \tfrac{4}{5}\sin t\right)^2 + \left(\tfrac{4}{5}\cos t - \tfrac{3}{5}\sin\right)^2 + 0^4 = \dots = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma(t) \in P,\ \forall t$$

(2) У задатку 1:

а) Шта су еквилибријуми?

б) Скицирати динамику (ФП).

в) Које стабилности су еквилибријуми?

а) $N = (0,0,1)$

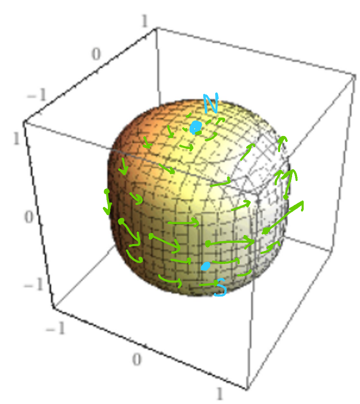
$S = (0,0,-1)$

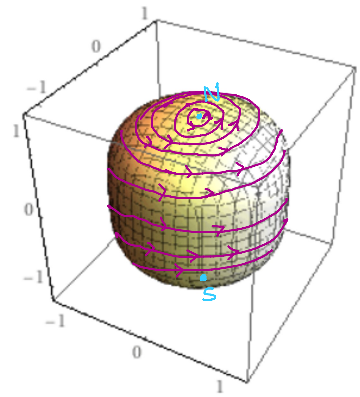
$X = \vec{0}$ на P

$X = (-y, x, 0)$

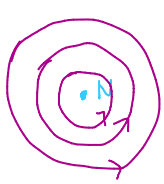
$x = y = 0: \ z^4 = 1 \Rightarrow z = \pm 1 \Rightarrow N$ и S

б)





в)



„центар"

N и S су стабилни, али не асимптотски