Критеријуми за непостојање граничног цикла

1) <u>Критеријум критичне тачке</u> – ако просто-повезана област $R \subseteq \mathbb{R}^2$ нема критичних тачака, онда R нема ни гранични цикл.

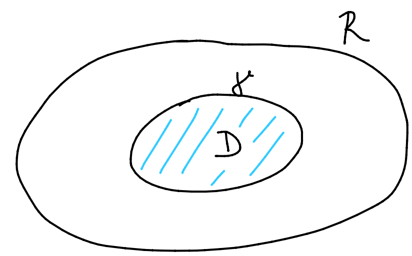
Доказ: ппс $\exists \gamma$ - гранични цикл у R

област D, тд. $\partial D = \gamma$

D - ограничена $\Rightarrow \overline{D}$ - компактна

$\overline{D} \subseteq R \subseteq \mathrm{Dom}\, F$

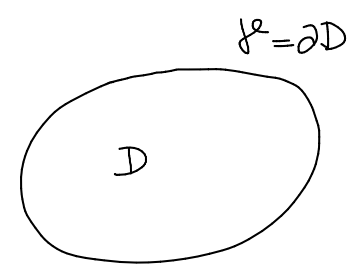
$\overset{TB8}{\Rightarrow} \exists$ еквилибријум у $\mathrm{int}(D) \subseteq R$ ↯



2) <u>Бендиксонов критеријум</u> – нека је $R \subseteq \mathbb{R}^2$ просто-повезана област, $f, g : R \to \mathbb{R}$ тд. $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial g}{\partial y}$ непрекидни на R и $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$ на R. Онда систем

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$$

нема затворену трајекторију у R.
($\Rightarrow$ нема гр. цикл)



Доказ: <u>ппс</u> $\exists \gamma$ - затв. трај. D тд. $\partial D = \gamma$

Гринова Т: $$\int_\gamma (-g\,dx + f\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Грин: $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \text{ непрекидна и } \neq 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} > 0 \text{ на } R \Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx\,dy > 0 \\ \text{или } &\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} < 0 \text{ на } R \Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx\,dy < 0 \end{aligned}\right\} \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx\,dy \neq 0$$

доказаћемо $\int_\gamma (-g\,dx + f\,dy) = 0$

$\gamma : r(t) = (p(t), q(t))$, $t \in I$ (нпр. $[0,1]$)

$$\int_\gamma(-g\,dx+f\,dy)=\int_I\Big(\underbrace{-g(p(t),q(t))\cdot p'(t)dt+f(p(t),q(t))\cdot q'(t)dt}_{=\langle F(r(t)),\,r'(t)\rangle dt}\Big)=\int_I\big(-q'(t)\cdot p'(t)+p'(t)\cdot q'(t)\big)dt=0 \quad ↯$$

γ – трајект. система $\Rightarrow$ $r(t)=(p(t),q(t))$ задовољава систем $\Rightarrow$ $\begin{aligned}p'(t)&=f(p(t),q(t))\\ q'(t)&=g(p(t),q(t))\end{aligned}$

$\Rightarrow\ \nexists$ затв. трај. у R.

① Доказати да дати системи немају гранични цикл.

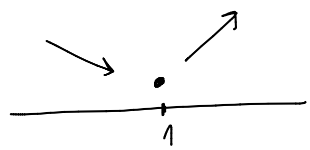
а) $\begin{aligned}x'&=e^{-y}+x\\ y'&=xy+1\end{aligned}$ б) $\begin{aligned}x'&=x^3y^2+x\\ y'&=x^2y^3+x^2\end{aligned}$ в) $\begin{aligned}x'&=y^2\\ y'&=x\end{aligned}$

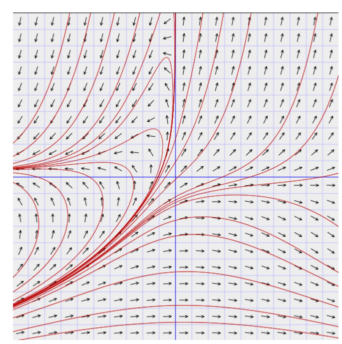
$\mathrm{Dom}\,F=\mathbb{R}^2$ – за сва три (просто-повезано)

а) еквилибријуми?

$e^{-y}+x=0 \Rightarrow x=-e^{-y}$

$xy+1=0 \rightarrow -ye^{-y}+1=0$





$h(y)=-ye^{-y}+1$

$h'(y)=-y\cdot(-e^{-y})+(-1)\cdot e^{-y}=e^{-y}(y-1)$

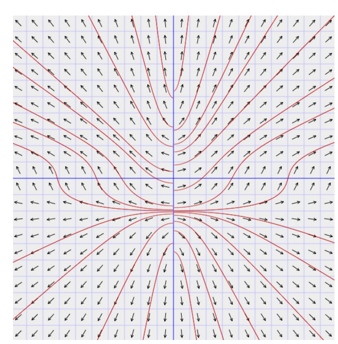
$h(1)=-1\cdot e^{-1}+1=1-\frac{1}{e}>0 \Rightarrow h(y)>0,\ \forall y\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ нема еквилибријума $\underset{1)}{\Rightarrow}$ нема гр. циклуса

б) еквилибријуми?

$\left.\begin{aligned}x^3y^2+x&=0\\ x^2y^3+x^2&=0\end{aligned}\right\}$ $\quad x(\overbrace{x^2y^2+1}^{>0})=0 \Rightarrow x=0$; $\quad x^2(y^3+1)=0$ ✓ $\Rightarrow y\in\mathbb{R}$

$X^*\in\{(0,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$

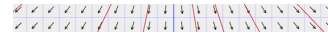


<u>I начин</u> Гранични цикл не може да „пређе преко" y-осе

$\Rightarrow$ цео је или у $L=\{x<0\}$ или у $D=\{x>0\}$

L и D су пр.-пов. и немају екв. $\Rightarrow$ нема гр. циклуса

<u>II начин</u> $f(x,y)=x^3y^2+x$



II начин $f(x,y) = x^3y^2+x$

$g(x,y) = x^2y^3+x^2$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2y^2+1\\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 3x^2y^2\end{aligned}\right\}\ \text{непр.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y} = 6x^2y^2+1 > 0 \text{ на } \mathbb{R}^2$$

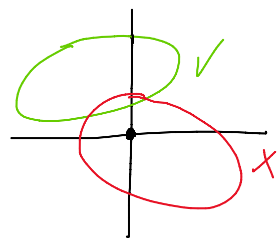
$\Rightarrow$ нема ф. цикла на $\mathbb{R}^2$

в) $x' = y^2$

$y' = x$

еквилибријуми: $X^* = (0,0)$

Б-К: $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y} = 0+0=0$ ✗

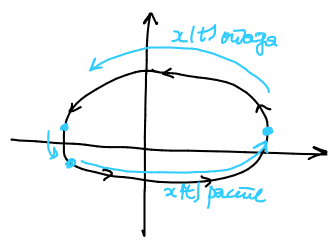


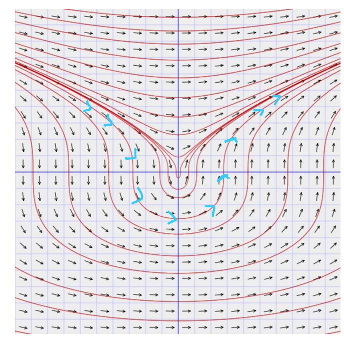
$x' = y^2 \geq 0 \Rightarrow x\nearrow$

→ функција $x(t)$ расте дуж трајекторија

→ x-координата увек повећава

$\pi_x(\gamma(t))\nearrow$ (по t)





γ-затв. трај. $\Rightarrow \exists T>0,\ \gamma(x+T)=\gamma(x) \Rightarrow \pi_x(\gamma(t))$ периодична

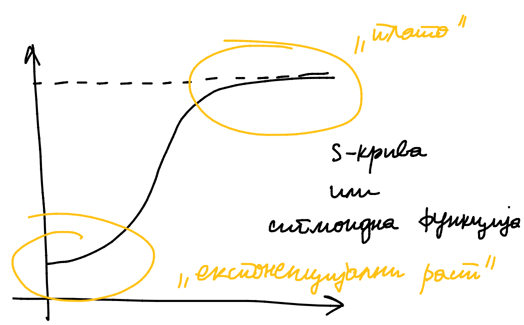
периодична + растућа $\Rightarrow$ константна

} $\gamma(t)$ има увек исту x-коорд. ↯

Екологија – компетитивне врсте

1 врста: $x' = rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$ логистички модел

$r, K > 0$



2 врсте без међусобне интеракције: $x' = r_1x\left(1-\frac{x}{K_1}\right)$

$y' = r_2x\left(1-\frac{y}{K_2}\right)$

овде имамо само такмичење унутар врсте $\sim x\cdot x,\ y\cdot y$

Имамо такмичење између врста: $x' = r_1x\left(1-\frac{x}{\ } - \frac{d_{12}}{\ }y\right)$

Уводимо такмичење између врста: $x \cdot y, y \cdot x$

$$x' = r_1 x\left(1 - \frac{x}{K_1} - \frac{\alpha_{12}}{r_1} y\right)$$

$$y' = r_2 y\left(1 - \frac{y}{K_2} - \frac{\alpha_{21}}{r_2} x\right)$$

$\alpha_{12}, \alpha_{21} > 0$
мере јачину интеракције између врста

6 параметара $\rightsquigarrow$ упростити простор параметара (доћи ћемо до $\mathbb{R}^3$ – три параметра)
$(\mathbb{R}^6)$

смена нез. пром.: $t \rightsquigarrow r_1 t$

смене: $x \rightsquigarrow \frac{x}{K_1}$

$y \rightsquigarrow \frac{y}{K_2}$

ознаке: $\rho = \frac{r_2}{r_1}$

$a_{12} = \frac{\alpha_{12} K_2}{r_1}$

$a_{21} = \frac{\alpha_{21} K_1}{r_2}$

систем се своди на: $x' = x(1 - x - a_{12} y)$

$y' = \rho y (1 - y - a_{21} x)$

$\rho, a_{12}, a_{21} > 0$

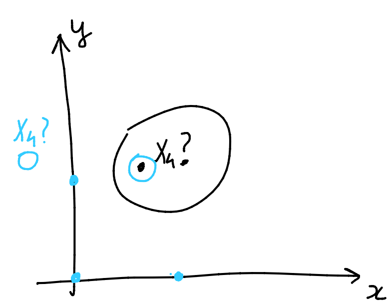
$G = \{x \geq 0, y \geq 0\}$ – посматрамо ову област, зато што има биолошку интерпретацију

Нулклине:

$x' = 0$:
$x(1 - x - a_{12} y) = 0$
$\Updownarrow$
$x = 0$
$1 - x - a_{12} y = 0$

$y' = 0$:
$\rho y (1 - y - a_{21} x) = 0$
$\Updownarrow$
$y = 0$
$1 - y - a_{21} x = 0$

Еквилибријуми: $X_1(0,0)$, $X_2(1,0)$, $X_3(0,1)$, $X_4\left(\frac{1-a_{12}}{1-a_{12}a_{21}}, \frac{1-a_{21}}{1-a_{12}a_{21}}\right)$



$X_4 \in G \iff (a_{12}a_{21} < 1 \wedge a_{12} < 1 \wedge a_{21} < 1) \vee (a_{12}a_{21} > 1 \wedge a_{12} > 1 \wedge a_{21} > 1)$

$\iff (a_{12} < 1 \wedge a_{21} < 1) \vee (a_{12} > 1 \wedge a_{21} > 1)$

случајеви које нећемо разматрати: ако је неки од a_{12} или a_{21} једнак 1

Случајеви: I) $a_{12} < 1 \wedge a_{21} < 1$

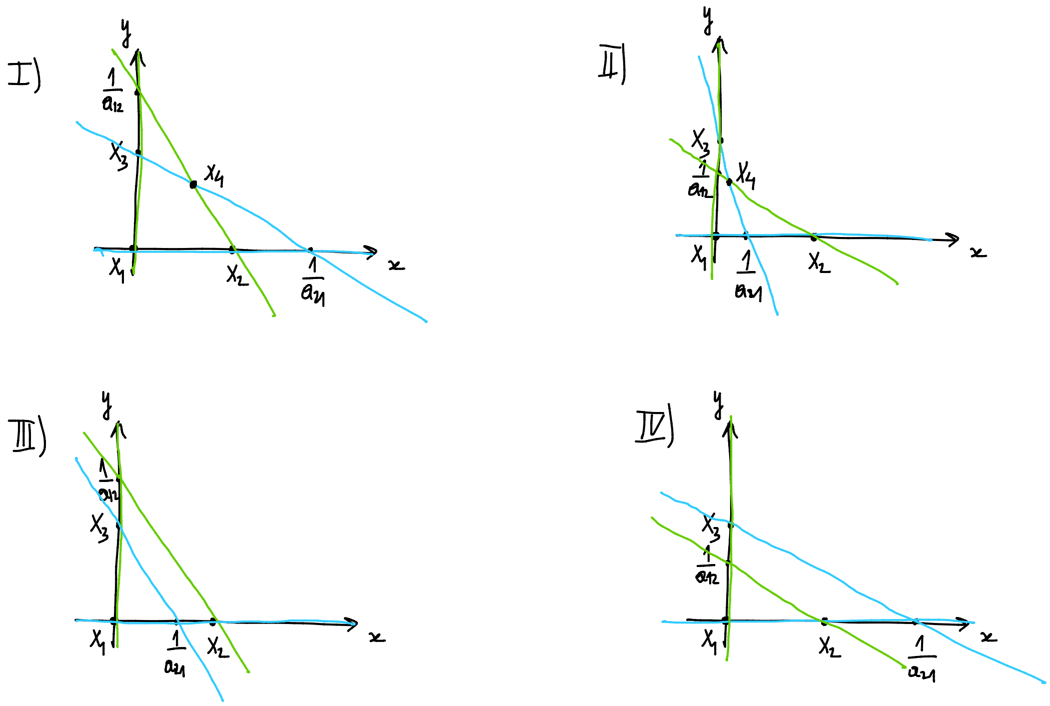
II) $a_{12} > 1 \wedge a_{21} > 1$

имамо и X_4

III) $a_{12} < 1 \wedge a_{21} > 1$

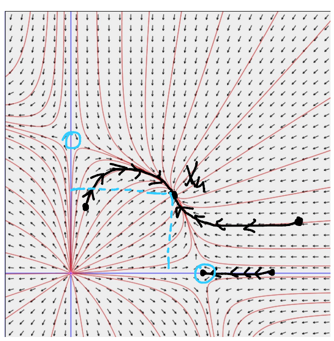
IV) $a_{12} > 1 \wedge a_{21} < 1$

Нулклинације:



I) коегзистирајуће врсте   нпр. $x' = x\left(1 - x - \frac{y}{3}\right)$

$y' = y\left(1 - y - \frac{x}{2}\right)$

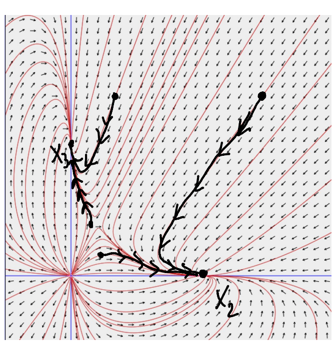


$\forall\, x(0), y(0) > 0 \Rightarrow (x(t), y(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} X_4$

$a_{12}, a_{21} < 1$ – такмичење није довољно јако и обе врсте опстају, али у мањем броју него да су саме

II) изумирање врсте   нпр. $x' = x(1 - x - 2y)$

$y' = y(1 - y - 3x)$



могуће тачке завршетка ФТ су X_2 или X_3 – зависи од $(x(0), y(0))$ где ћемо завршити

X_2: $y = 0$ $\rightarrow$ друга врста изумире, а прва долази у стање свог еквилибријума

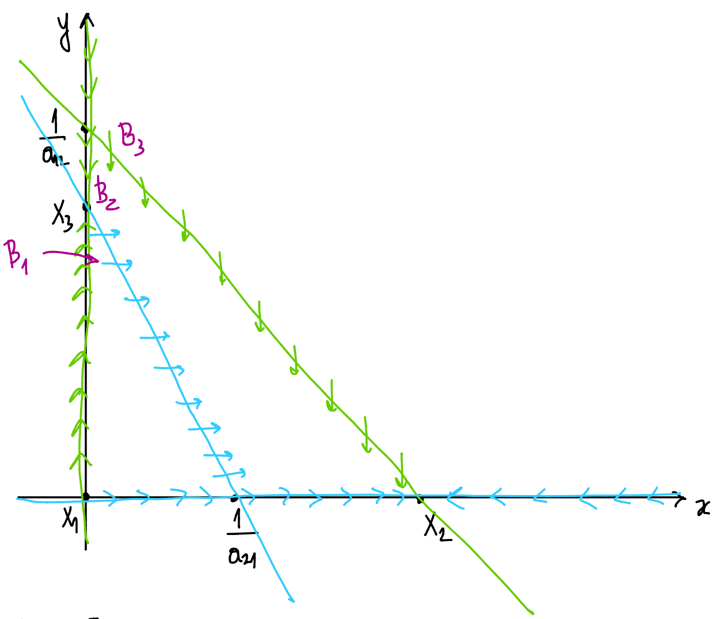
X_3: $x = 0$ $\rightarrow$ прва врста изумире, а друга долази у

Стање свог еквилибријума

$a_{12}, a_{21} > 1$ – оба су довољно велика да може доћи до изумирања

III) и IV) су симетрични – урадићемо III) детаљно

$$x' = x(1 - x - a_{12}y)$$
$$y' = \rho y(1 - y - a_{21}x)$$
$$a_{12} < 1 \ \wedge \ a_{21} > 1$$



Стабилност еквилибријума:

$$F(x,y) = \left(x(1-x-a_{12}y), \ \rho y(1-y-a_{21}x)\right)$$

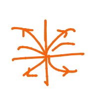
$$dF(x,y) = \begin{bmatrix} 1-2x-a_{12}y & -a_{12}x \\ -a_{21}\rho y & \rho(1-2y-a_{21}x) \end{bmatrix}$$

$$dF(X_1) = dF(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1 > 0, \ \lambda_2 = \rho > 0 \quad \text{– нестабилан}$$

$$dF(X_2) = dF(1,0) = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} \\ 0 & \rho(1-a_{21}) \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1 < 0, \ \lambda_2 = \rho(1-a_{21}) < 0 \quad \text{– асимптотски стабилан}$$

$$dF(X_3) = dF(0,1) = \begin{bmatrix} 1-a_{12} & 0 \\ -a_{21}\rho & -\rho \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1-a_{12} > 0, \ \lambda_2 = -\rho < 0 \quad \text{– нестабилан}$$

Напомена: ХГ теорема $\Rightarrow$ пошто су $dF(X_j)$ хиперболичке $\Rightarrow$ $X' = dF(X_j)\cdot X$ и $X' = F(X)$ топ. еквив.
$j \in \{1,2,3\}$
$\Rightarrow$ они „слично изгледају" у некој окол.
$\Rightarrow$ у тој околини се може скицирати ФП

X_1 – нест. чвор 

X_2 – стаб. чвор 

X_3 – седло 

Понашање дуж нулклинација:

$x'=0$:

$x=0$: $x'=0$

$y'=\rho y(1-y)$ – логистичка

$y'>0 \Leftrightarrow y\in(0,1)$

$y'=0$:

$y=0$: $y'=0$

$x'=x(1-x)$

$x'>0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$

$1-x-a_{12}y=0$:

$x=1-a_{12}y$

$y\in\left(0,\frac{1}{a_{12}}\right)$

$y'=\rho y(1-y-a_{21}x)$ ког је знака?

$$1-y-a_{21}x = 1-y-a_{21}(1-a_{12}y) = 1-y-a_{21}+a_{12}a_{21}y \overset{?}{<} 0$$

$$\Leftrightarrow 1-a_{21}-y(1-a_{12}a_{21})<0$$

$$\Leftrightarrow y(1-a_{12}a_{21}) > 1-a_{21} \quad / \cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow y(a_{12}a_{21}-1) < \underbrace{a_{21}-1}_{>0}$$

1° $a_{12}a_{21}-1<0$ ✓ $(+)\cdot(-)<(+)$

2° $a_{12}a_{21}-1>0$ ... $\Leftrightarrow y<\frac{a_{21}-1}{a_{12}a_{21}-1}$

треба доказ: $\frac{1}{a_{12}} < \frac{a_{21}-1}{a_{12}a_{21}-1}$

$\Leftrightarrow$

$a_{12}a_{21}-1 < a_{12}a_{21}-a_{12}$

$\Leftrightarrow a_{12}<1$ ✓

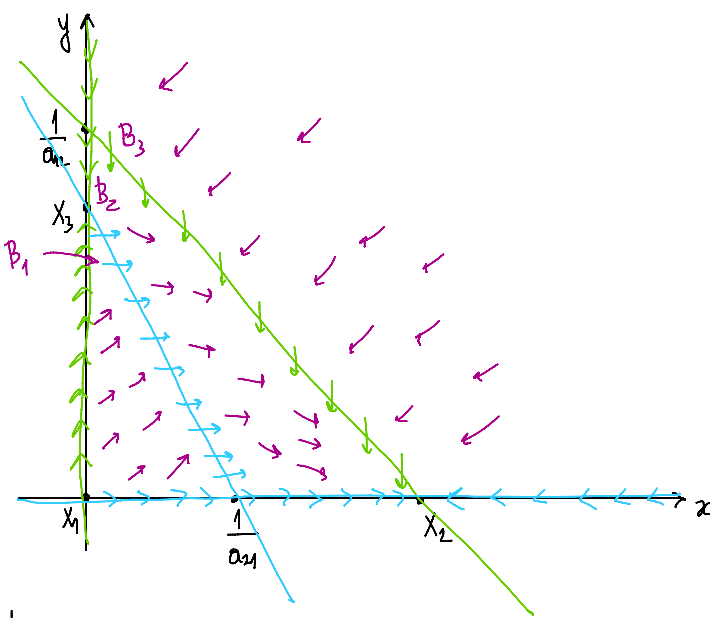
$\Rightarrow y'<0 \Rightarrow$ век. поље гледа надоле $\downarrow$

$1-y-a_{21}x=0$: $\Rightarrow$ налазимо се испод

$1-x-a_{12}y=0 \Rightarrow y<\frac{1-x}{a_{12}}$

$\Rightarrow 1-x-a_{12}y>0 \Rightarrow x'>0$

$\Rightarrow$ идемо $\rightarrow$



Басени:

B_1: испод обе праве $1-x-a_{12}y=0$ и $1-y-a_{21}x=0$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix}1-x-a_{12}y>0\\ 1-y-a_{21}x>0\end{matrix}\right\}\ x',y'>0$ $\nearrow$

B_2: прелазимо преко $1-y-a_{21}x=0 \Rightarrow$ мења се знак y'

$x'>0,\ y'<0$ $\searrow$

B_3: мења се знак $x' \Rightarrow x',y'<0$ $\swarrow$

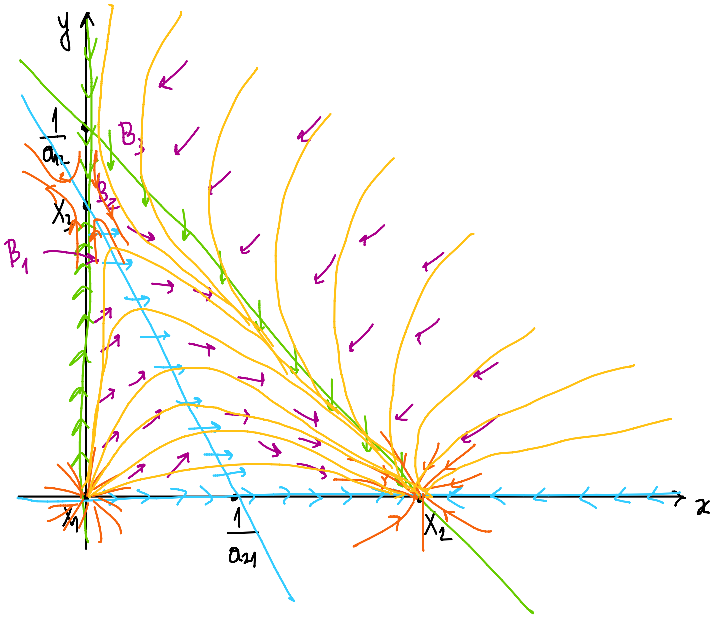
- ако кренемо из $B_1 \Rightarrow$ прећи ћемо у B_2
- ако кренемо из $B_3 \Rightarrow$ прећи ћемо у B_2 или завршити у X_3 (горњи-леви ћошак)

• ако кренемо из B_1 ⇒ прећи ћемо у B_2

• ако кренемо из B_3 ⇒ прећи ћемо у B_2 или завршити у X_2 (горњи-леви ћошак)

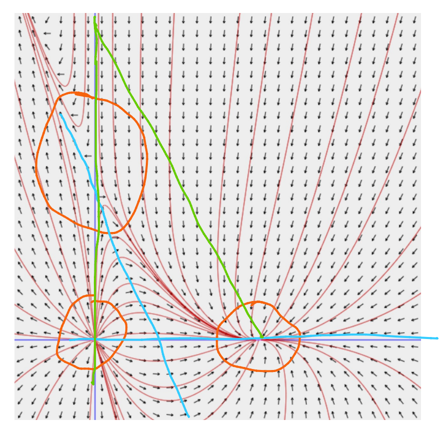
• ако се нађемо у B_2 ⇒ остајемо у B_2

• све трајекторији морају да заврше у доњем-десном ћошку $= X_2$



нпр. $x' = x(1 - x - \frac{y}{2})$

$y' = y(1 - y - 3x)$



За свако $(x(0), y(0))$ после довољно времена $y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ ⇒ y врста умире

x се стабилизује у X_2

$\left.\begin{matrix} a_{21} > 0 \\ a_{12} < 0 \end{matrix}\right\}$ x доминантна у овој ситуацији

IV) x изумире, y је у X_3