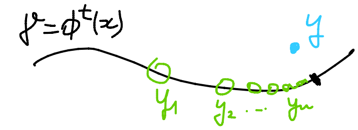
① Нека је $x' = F(x)$ планарни систем без еквилибријума чији ток ϕ^t чува запремину. Доказати да је свака трајекторија затворен скуп.

$\forall U \subseteq \mathbb{R}^2$ мерљив
$P(\phi^t(U)) = P(U)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

↳ тополошки $\gamma = \bar{\gamma}$, $\forall$ орбиту γ.

ппс $\exists \gamma$ трајекторија $\gamma \neq \bar{\gamma}$, тј. $y \in \bar{\gamma} \setminus \gamma$

$\gamma = \{\phi^t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$



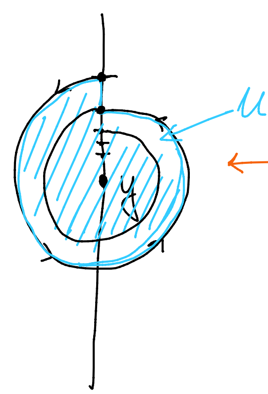
Односно, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, $y_n \in \gamma$

$\exists t_n, t_n \nearrow \infty$ тд. $y = \lim_{n\to\infty} \phi^{t_n}(x)$ (y_n су са орбите, а y није са орбите)

↳ ако $\lim_{n\to\infty} t_n = T \in \mathbb{R}$, онда $\underset{\notin \gamma}{y} = \lim_{n\to\infty} \phi^{t_n}(x) = \underset{\in \gamma}{\phi^T(x)}$ ↯

$\Rightarrow y \in \omega(x)$

$\exists$ трансверзала кроз y



1) ако се деси да се „пун" смањује или повећава
$\Rightarrow$ површина се не одржава
Узимамо U као на слици
$P(\phi^t(U))$ се смањује или повећава ↯

2) мора важити да опет долазимо у исту тачку на трансверзали
$\Rightarrow$ имамо затворену орбиту γ

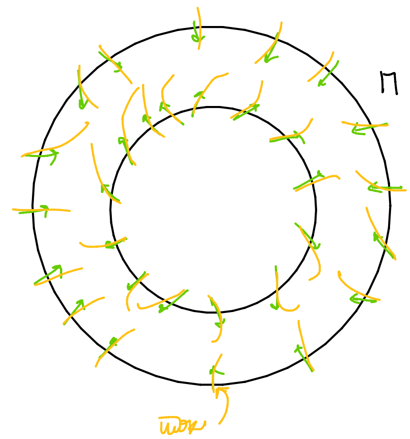
$\partial U = \gamma$ и по тврђењу 8 $\Rightarrow \exists$ еквилибријум у U ↯

② Нека је F векторско поље деф. у околини прстена $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le \|x\| \le 2\}$. Претпоставимо да F нема нула на $\mathbb{R}^2$ и да је F трансверзално на $\partial\Pi$ и показује ка унутра (ка Π).

(2) Нека је F векторско поље деф. у околини прстена $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\| \leq 2\}$. Претпоставимо да F нема нула на $\mathbb{R}^2$ и да је F трансверзално на $\partial\Pi$ и показује ка унутра (ка Π).
Посматрамо дс. $X' = F(X)$.

а) Доказати да постоји затворена орбита у Π.

б) Ако их има тачно 7, доказати да за једну од њих важи да постоје трајекторије које јој се приближавају са обе стране (геометријски).



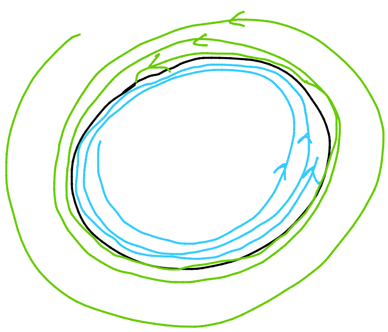
а) Π је компактан

F нема нула $\Rightarrow$ нема еквилибријума

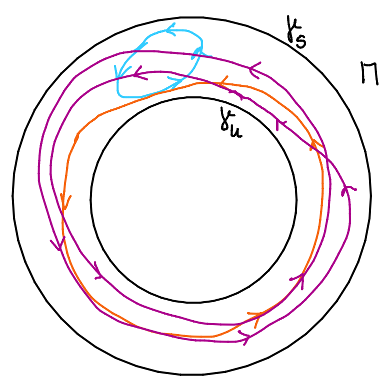
$\underset{\forall t \geq 0}{\phi^t(\Pi)} \subseteq \Pi$ (због слике) $\Rightarrow$ Π је инваријантно за ток

$\Rightarrow$ тврђење 6) Π садржи еквилибријум или гранични циклус
↳ не може ↳ свакако затв. орбита

б)



Где могу бити ове затв. орбите?



1) не обилази прстен ниједном

по тврђењу 8 $\Rightarrow$ $\exists$ еквилибријум у U ↯

2) ако обилази прстен више од једанпут

морате сама себе да пресече ↯ (због Пикара)

зашто?

нпр. направимо 2 круга и вратимо се на исто

После 1 круга смо (БУО) на мањој „висини" ($\|\phi^t(x)\|$)

него на почетку ⇒ морамо да останемо на мањој до краја ↯

3) направимо тачно 1 круг око прстена — ово је могуће

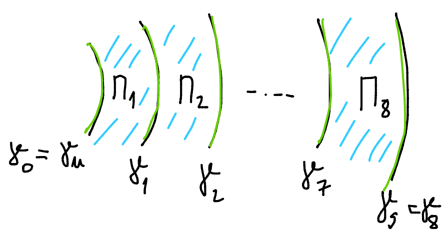
таква орбита дели прстен на две компоненте

$\exists$ 7 орбита ⇒ оне деле прстен на 8 области → $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_8$

↙ $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_7$

$\gamma_0 = \gamma_u = \partial^- \Pi$

$\gamma_8 = \gamma_s = \partial^+ \Pi$



Свака трајекторија цела припада некој од области Π_j.
$\neq \gamma_j$

$\omega(x)$ затв. и огр. ⇒ $\omega(x)$ компактан
и нема еквилибријума
и непразан

$\Big\} \xRightarrow{\text{ПБ}} \omega(x)$ је периодична орбита

⇒ ако је у Π_j, онда тежи γ_j или γ_{j-1}.

ППС сваку трај. γ_j се не приближава трајекторија са бар 1 стране (било из Π_j или Π_{j+1}).

Π_1: све иде ка γ_1

$\Rightarrow$ из Π_2 : све иду ка γ_2^c

$\Rightarrow$ из Π_3 : све иду ка γ_3^c

$\vdots$

$\Rightarrow$ из Π_7 : све иду ка γ_7^c

али из Π_8 морају тежити ка γ_7^c ↯