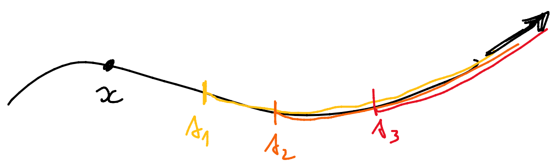
динамички систем у $\mathbb{R}^n$: $\frac{d}{dt}\phi^t(x) = F(\phi^t(x))$, $\phi^0 = id$

$\phi^t : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$

$\omega(x) = \{ y \in \mathcal{U} \mid \exists t_n \nearrow \infty ,\ \phi^{t_n}(x) \to y \}$ „омега скуп"

$\alpha(x) = \{ y \in \mathcal{U} \mid \exists t_n \searrow -\infty ,\ \phi^{t_n}(x) \to y \}$ „алфа скуп"

① Доказати $\omega(x) = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \overline{\{\phi^t(x) \mid t \geq s\}}$ и $\alpha(x) = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \overline{\{\phi^t(x) \mid t \leq s\}}$.



$\boxed{\subseteq}$ $y \in \omega(x) \Rightarrow (\forall s \in \mathbb{R})\ y \in \overline{\{\phi^t(x) \mid t \geq s\}}$

$\exists t_n \nearrow \infty ,\ \phi^{t_n}(x) \to y \overset{?}{\Rightarrow}$ $s \in \mathbb{R}$ произв. да ли $y \in \overline{\{\phi^t(x) \mid t \geq s\}}$

$(y \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists x_n \in A$ тд. $x_n \to y)$

$(\exists n_0) \forall n \geq n_0$ важи $t_n \geq s$, јер $t_n \to \infty$

$\Rightarrow \phi^{t_n}(x) \in \{\phi^t(x) \mid t \geq s\}$ и $\phi^{t_n}(x) \to y$

$\Rightarrow y \in \overline{\{\phi^t(x) \mid t \geq s\}}$

$\boxed{\supseteq}$ $y \in \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \overline{\{\phi^t(x) \mid t \geq s\}} \Rightarrow (\forall s \in \mathbb{R})\ y \in \overline{\{\phi^t(x) \mid t \geq s\}}$

Треба нам $t_n \nearrow \infty$ тд. $\phi^{t_n}(x) \to y$ $(y \in \omega(x))$

$\varepsilon > 0$ дато, хоћемо $\| \phi^{t_n}(x) - y \| < \varepsilon$

$s = 1$: $y \in \overline{\{\phi^t(x) \mid t \geq 1\}} \Rightarrow (\exists t_1 \geq 1)\ \| \phi^{t_1}(x) - y \| < \varepsilon$

$s = 2$: $\exists t_2 \geq \max\{2, t_1\}$: $\| \phi^{t_2}(x) - y \| < \frac{\varepsilon}{2}$

$s = 3$: $\exists t_2 \geq \max\{3, t_2\}$: $\| \phi^{t_3}(x) - y \| < \frac{\varepsilon}{3}$

$n=3$: $\exists t_3 \geq \max\{3, t_2\}$: $\|\phi^{t_3}(x)-y\| < \frac{\varepsilon}{3}$

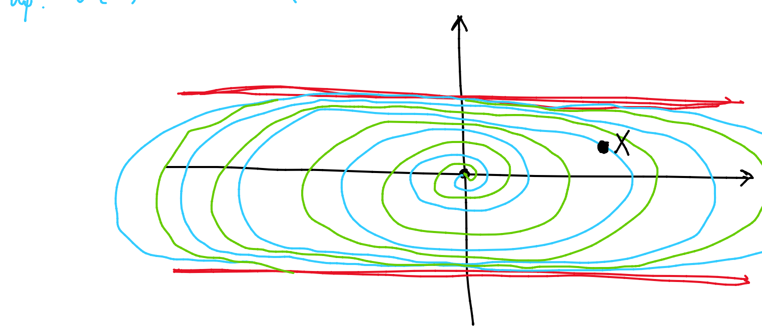
$\vdots$

тако добијамо низ $t_n \geq n$ и $t_n \nearrow$ тд. $\|\phi^{t_n}(x)-y\| < \frac{\varepsilon}{n}$ $/\lim_{n\to\infty}$

$\Rightarrow t_n \nearrow \infty$ $\qquad \phi^{t_n}(x) \to y$.

(2) $\omega(x)$ компактан $\Rightarrow$ $\omega(x)$ повезан

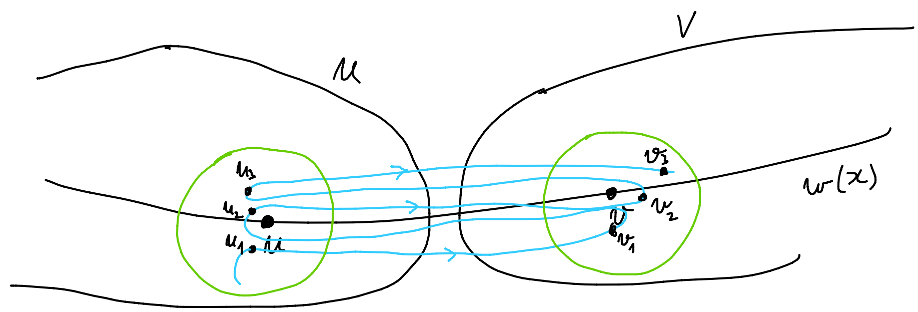
Пр. $\omega(x)$ неповезан (и некомпактан)

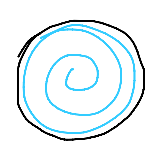


$\omega(X)$ = унија црвених правих

ППС $\omega(x)$ није повезан $\Rightarrow$ $\exists U, V \neq \emptyset$ отворени, $\omega(x) \subseteq U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$

$U \cap \omega(x) \neq \emptyset$, $V \cap \omega(x) \neq \emptyset$





$\Rightarrow$ $\exists u \in U \cap \omega(x)$

$\exists v \in V \cap \omega(x)$

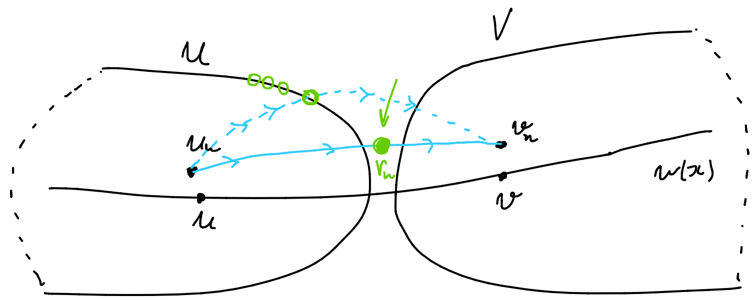
U отв. $(\exists \varepsilon > 0)$ $B(u;\varepsilon) \subseteq U$. У тој лопти $\exists$ ∞ много чланова $\phi^t(x)$

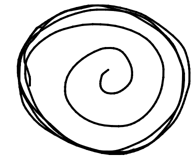
слично за V

$\exists u_n \nearrow \infty$ тд. $\phi^{u_n}(x) \to u$, тј. $\phi^{u_n}(x) \in U$

$\exists v_n \nearrow \infty$ тд. $\phi^{v_n}(x) \to v$, тј. $\phi^{v_n}(x) \in V$

изаберемо их тако да $\ldots < u_n < v_n < u_{n+1} < v_{n+1} < \ldots$





t_n посматрамо: $R_n = \{\phi^t(x) \mid t \in [u_n, v_n]\}$ је повезан и $R_n \cap U \neq \phi$, $R_n \cap V \neq \phi$

онда не може да $R_n \subseteq U \cup V$ (јер би била дисконекција)

$\Rightarrow \exists r_n \in [u_n, v_n]$ тд. $\phi^{r_n}(x) \notin U \cup V$.

Тако добијамо низ $r_n \nearrow \infty$ и $\phi^{r_n}(x) \notin U \cup V$

Хоћемо да $\phi^{r_n}(x)$ има конвергентан подниз. Тј, да те тачке буду у неком компакту.

$\omega(x)$ компактан $\Rightarrow \omega(x)$ ограничен $\Rightarrow$ могу се U и V изабрати тд. су ограничени

r_n бирамо тако да $r_n = \min\{t \mid t \in [u_n, v_n], \phi^t(x) \notin U\}$. Тј. бирамо прву тачку која испадне из U. Онда је $\phi^{r_n}(x) \in \partial U$ ($\partial U \cap U = \phi$, $d(\partial U, U) = 0$).

$\bar{U} = \partial U \cup U \ni \phi^{r_n}(x)$ и $\bar{U}$ је компактан $\Rightarrow$ $\phi^{r_n}(x)$ има конвергентан подниз

$\exists r_{n_k}$ тд. $\phi^{r_{n_k}}(x) \to y \Rightarrow y \in \omega(x)$. Очигледно $y \notin V$.

$y \notin U$ јер иначе $\exists$ околина од y у U која нема елем. $\phi^{r_{n_k}}(x)$, а то не може.

$y \in \omega(x)$, $y \notin U \cup V$ ↯

③ У датим системима одредити све тачке које су у ω или α скупу.

а) $r' = r(1-r)$

$\theta' = 1$

б) $x' = -y + x(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$y' = x + y(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\theta' = 1$

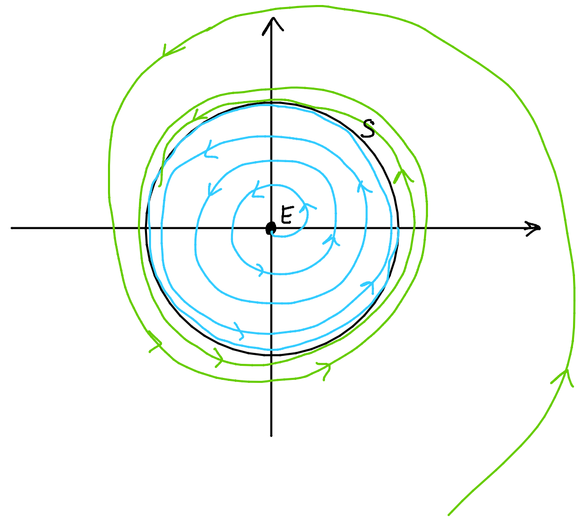
$$y' = x + y(x^2+y^2)\cdot \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

а) $\theta = t + c$, ротира се у поз. смеру

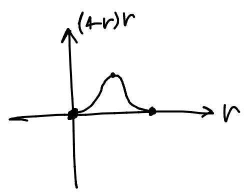
$r \equiv 0$, $r \equiv 1$ решења

$r \equiv 0$ ↙ еквилибријум $= \{E\}$

$r \equiv 1$ ↘ затворена орбита $= S$



$r \in (0,1)$: $r(1-r) \in (0,1) \Rightarrow r' > 0 \Rightarrow r \nearrow$



$r > 1$: $r(1-r) < 0 \Rightarrow r' < 0 \Rightarrow r \searrow 0$

1) $\|X\| > 1$: $\omega(X) = S$

$\alpha(X) = \emptyset$

2) $\|X\| = 1$: $\omega(X) = \alpha(X) = S$

3) $\|X\| \in (0,1)$: $\omega(X) = S$

$\alpha(X) = \{E\}$

4) $X = \{(0,0)\}$: $\omega(X) = \{E\}$

$\alpha(X) = \{E\}$

б) $$x' = -y + x(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$y' = x + y(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

⇝ пребацујемо у поларне координате

$x(t), y(t) \rightsquigarrow r(t), \theta(t)$

$x^2+y^2 = r^2$

$x = r\cos\theta \Rightarrow x' = r'\cos\theta + r(-\sin\theta)\theta'$

$y = r\sin\theta \Rightarrow y' = r'\sin\theta + r\cos\theta\,\theta'$

$$\left.\begin{aligned} r'\cos\theta - r\sin\theta\,\theta' &= -r\sin\theta + r\cos\theta\cdot r^2\cdot\sin\frac{1}{r} \quad /\cdot\cos\theta \\ r'\sin\theta + r\cos\theta\,\theta' &= r\cos\theta + r\sin\theta\cdot r^2\cdot\sin\frac{1}{r} \quad /\cdot\sin\theta \end{aligned}\right\} +$$

$$r'\cos^2\theta + r'\sin^2\theta = r^3\cos^2\theta\sin\frac{1}{r} + r^3\sin^2\theta\sin\frac{1}{r}$$

$$r' = r^3\sin\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \theta' r\sin\theta = -r\sin\theta + r^3\sin\frac{1}{r}\cos\theta - r^3\sin\frac{1}{r}\cos\theta \Rightarrow \theta' = 1$$

$$\left.\begin{aligned} r' &= r^3\sin\frac{1}{r} \\ \theta' &= 1 \end{aligned}\right\}$$

додефинишемо да је 0 у $r=0$

$\theta = t + c$, ротира се у поз. смеру

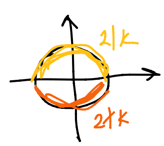
$$r^3\sin\frac{1}{r} = 0 \iff r=0 \ \lor\ \sin\frac{1}{r}=0 \iff r=0 \ \lor\ r\in\left\{\frac{1}{k\pi}\,\middle|\,k\in\mathbb{N}\right\}$$

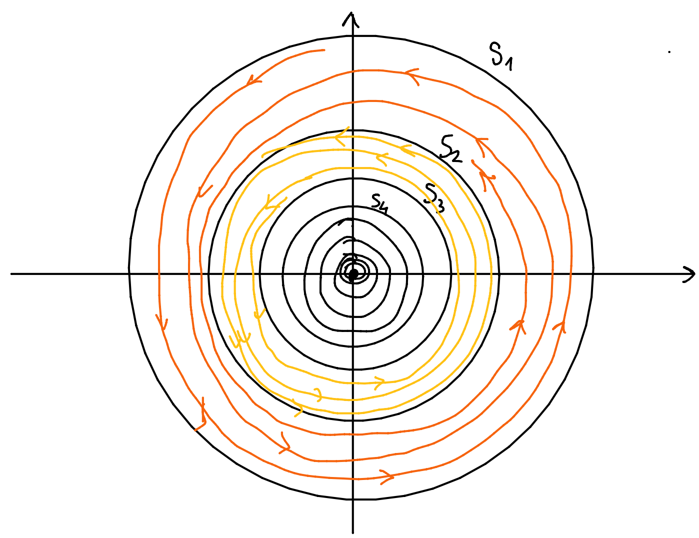
$/\!/\ S_k,\ k\in\mathbb{N}$

$r\in\left(\frac{1}{(k+1)\pi}, \frac{1}{k\pi}\right)$:

$\frac{1}{r}\in(k\pi,(k+1)\pi)$

$\operatorname{sgn}\sin\frac{1}{r} = (-1)^k \Rightarrow \operatorname{sgn}(r') = (-1)^k$





1) $2|k$: $r'>0 \Rightarrow r\nearrow$

$\alpha = S_{k+1}$

$\omega = S_k$

2) $2\nmid k$: $r'<0 \Rightarrow r\searrow 0$

$\alpha = S_k$

$\omega = S_{k+1}$

закључак: S_{2k} су ω-скупови
S_{2k+1} су α-скупови од тачака $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$.

(4) Дат је дин. сис. ϕ^t. Ако постоји строга ф-ја Љапунова (ф-ја Љапунова V, која строго опада дуж неконстантних трајекторија, $V'<0$) онда су $\alpha(x), \omega(x)$ фиксне тачке.

$$\phi^t \rightsquigarrow F$$

<u>ППС</u> $\exists y \in \omega(x)$ тд. није фиксна $F(y) \neq 0$.

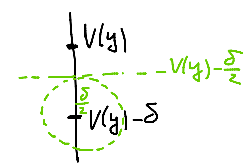
$\exists t_n \nearrow \infty$, $\phi^{t_n}(x) \to y$

$s>0$ фиксирамо и гледамо

$$V(y) > V(\phi^s(y)) \quad (y \in Fix(\phi^t) \Rightarrow V(y) = V(\phi^s(y)))$$

$$V(y) - V(\phi^s(y)) = \delta > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} V\left(\phi^s\left(\phi^{t_n}(x)\right)\right) = V\left(\phi^s\left(\lim_{n\to\infty} \phi^{t_n}(x)\right)\right) = V(\phi^s(y)) = V(y) - \delta$$



$$\Rightarrow (\exists n_0)\ \forall n \geq n_0 \quad V(\phi^s(\phi^{t_n}(x))) < V(y) - \frac{\delta}{2}$$

$\forall t_n$ постоји $t_N \geq s + t_n$ (то јер $t_n \nearrow \infty$)

Узмемо подниз t_N: $\quad V(\phi^{t_N}(x)) < V(\phi^{t_n+s}(x)) < V(y) - \frac{\delta}{2}$

$N \to \infty$: $\quad \lim_{N\to\infty} V(\phi^{t_N}(x)) = V(y)$

$$\Rightarrow V(y) \leq V(y) - \frac{\delta}{2} \ ↯$$