3 - четвртак 24.03.2022.

$$X' = F(X)$$

T1 **Теорема 152.** *Нека је $L := dF(\mathbf{x}_*)$ линеарни оператор такав да је $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, за сваку сопствену вредност λ* ~~*и нека је*~~

$$\cancel{V(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2},$$

~~*где је $\|\cdot\|$ норма Љапунова придружена оператору L као у Напомени 151. Тада је V строга функција Љапунова из тачке (в) Теореме 143,*~~ *па је $\mathbf{x}_*$ асимптотски стабилни еквилибријум система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$*~~*, штавише, важи и следећа априорна оцена: постоје $c_1, c_2 > 0$ и околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ такви да важи*~~

$$\cancel{\|\phi^t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_*\| \le c_2 e^{-c_1 t}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|},$$

~~*за свако $t \ge 0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$.*~~

$$\boxed{\forall \lambda,\ \mathrm{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow X_* \text{ AC}}$$

T2 **Теорема 153.** *Ако је $\mathbf{x}_*$ стабилни еквилибријум, тада не постоји сопствена вредност матрице $dF(\mathbf{x}_*)$ чији је реални део строго позитиван.*

$$dF(\mathbf{x}_*) = L$$

$$X_* \text{ c} \Rightarrow \forall \lambda,\ \mathrm{Re}(\lambda) \le 0$$

$$\boxed{\exists \lambda,\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow X_* \text{ H}}$$

2. Испитати стабилност еквилибријума из задатка 1 помоћу (метод теореме Љапунова) о сопственим вредностима.

а) $x_1' = -x_1 + 2x_2$, $x_2' = -3x_2$ б) $x_1' = -x_1 + 3x_2$, $x_2' = 5x_1 - 3x_2$ в) $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$.

$$X_* = (0,0)$$

а) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Re}(\lambda_1) &= -1 < 0\\ \mathrm{Re}(\lambda_2) &= -3 < 0\end{aligned}\right\} \overset{T1}{\Longrightarrow} X_* \text{ је AC}$$

б) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -6$

$$\mathrm{Re}(\lambda_1) = 2 > 0 \overset{T2}{\Longrightarrow} X_* \text{ је нест.}$$

в) $\lambda_{1/2} = \pm i$

$\mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) = \mathrm{Re}(\pm i) = 0 \rightsquigarrow$ не може се применити метод сопс. вр.

3. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$\begin{aligned}x_1' &= e^{x_1} - e^{-3x_3}\\ x_2' &= 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2)\\ x_3' &= \ln(1 - 3x_1 + x_3),\end{aligned}$$

а затим испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0,0,0)$.

$$X' = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned}&e^{x_1} - e^{-3x_3} = 0 \rightsquigarrow x_1 = -3x_3\\ &4x_3 - 3\sin(x_1+x_2) = 0\\ &\ln(1 - 3x_1 + x_3) = 0 \rightsquigarrow -3x_1 + x_3 = 0\end{aligned}\right\} x_1 = -3x_3 = -3\cdot 3x_1 = -9x_1 \Rightarrow x_1 = x_3 = 0$$

$$0 = 3\sin(0 + x_2) \Rightarrow \sin x_2 = 0 \Rightarrow x_2 \in \mathbb{Z}\pi$$

$$X_* \in \{(0, k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$X_* = (0,0,0)$: $\quad L = dF(X_*)$

$$L = \begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & 3e^{-3x_3}\\ -3\cos(x_1+x_2) & -3\cos(x_1+x_2) & 4\end{bmatrix}$$

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} - e^{-3x_3}$$

$X_* = (0,0,0)$: $\quad L = dF(X_*)$

$$F_1(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1} - e^{-3x_3}$$
$$F_2(x_1,x_2,x_3) = 4x_3 - 3\sin(x_1+x_2)$$
$$F_3(x_1,x_2,x_3) = \ln(1-3x_1+x_3)$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{X=X_*} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ -3\cos(x_1+x_2) & -3\cos(x_1+x_2) & 4 \\ \frac{-3}{1-3x_1+x_3} & 0 & \frac{1}{1-3x_1+x_3} \end{bmatrix}_{X_*=(0,0,0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -3$, $\quad \lambda_{2/3} = 1 \pm 3i$

$$\left.\begin{matrix} Re(\lambda_1) < 0 \\ Re(\lambda_{2/3}) > 0 \end{matrix}\right\} \ X_* = (0,0,0) \text{ је нестабилан}$$

4. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$x_1' = (x_3+1)(2x_2 - x_1)$$
$$x_2' = -(x_3+1)(x_1+x_2)$$
$$x_3' = -x_3^3,$$

а затим испитати њихову стабилност.

$$X' = 0 \Rightarrow \begin{matrix} (x_3+1)(2x_2-x_1) = 0 \\ -(x_3+1)(x_1+x_2) = 0 \\ -x_3^3 = 0 \rightsquigarrow x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2x_2 - x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ \hline x_1 = x_2 = 0 \end{matrix}$$

$X_* = (0,0,0)$

$$L = dF(X_*) = \begin{bmatrix} -(x_3+1) & 2(x_3+1) & 2x_2 - x_1 \\ -(x_3+1) & -(x_3+1) & -(x_1+x_2) \\ 0 & 0 & -3x_3^2 \end{bmatrix}_{(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_{2/3} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$$\left.\begin{matrix} Re(\lambda_1) = 0 \\ Re(\lambda_{2/3}) = -1 < 0 \end{matrix}\right\} \text{ метод сопств. вр. не даје одговор}$$

Теорема 143. (Теорема Љапунова) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ класе C^1 и $\mathbf{x}_* \in \mathcal{U}$ такво да је $F(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$. Означимо са ϕ^t решење једначине*

нека околина од X_*

$$\frac{d}{dt}\phi^t(\mathbf{x}) = F(\phi^t(\mathbf{x})), \quad \phi^0 = \mathrm{Id}\,.$$

Претпоставимо да постоји функција $V : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ таква да важи

ф-ја Љапунова

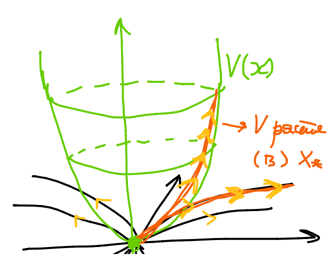
- *V је класе C^1 на $\mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$*
- *$V(\mathbf{x}) > 0$ за $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$, $V(\mathbf{x}_*) = 0$.*

Тада важи

(а) *ако V опада дуж решења ϕ^t, тада постоји околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, решење $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\mathbf{x}_*$ је стабилни еквилибријум;*

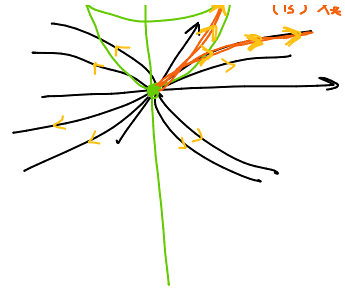
(б) *ако V строго опада дуж решења система, тада постоји околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је за свако $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$, решење $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\mathbf{x}_*$ је асимптотски стабилни еквилибријум;*

(в) *ако V строго расте дуж решења система, тада је $\mathbf{x}_*$ нестабилни еквилибријум.*



(б) ако V строго опада дуж решења система, тада постоји околина $\mathcal{U}_0$ тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је за свако $\mathbf{x}\in\mathcal{U}_0$, решење $\phi^t(\mathbf{x})$ дефинисано за свако $t\ge 0$; осим тога, $\mathbf{x}_*$ је асимптотски стабилни еквилибријум;

(в) ако V строго расте дуж решења система, тада је $\mathbf{x}_*$ нестабилни еквилибријум.



(в) X_* нестабилан

Напомена 144. Ако уведемо ознаку

$$V'(\mathbf{x}) := \frac{d}{dt}\left[V(\phi^t(\mathbf{x})\right]_{t=0},$$

из

$$\frac{d}{dt}\left[V(\phi^t(\mathbf{x})\right]_{t=s} = \frac{d}{dt}\left[V(\phi^{t+s}(\mathbf{x})\right]_{t=0} = V'(\phi^s(\mathbf{x}))$$

видимо да је

- услов (а) из Теореме 143 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x})\le 0$, за $\mathbf{x}\in\mathcal{U}$;
- услов (б) из Теореме 143 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x})< 0$, за $\mathbf{x}\in\mathcal{U}$;
- услов (в) из Теореме 143 еквивалентан услову $V'(\mathbf{x})> 0$, за $\mathbf{x}\in\mathcal{U}$;.

Како је

$$V'(\mathbf{x}) = dV(\phi^t(\mathbf{x}))(F(\phi^t(\mathbf{x}))|_{t=0} = \langle\nabla V(\mathbf{x}), F(\mathbf{x})\rangle,$$

закључујемо да провера да ли нека глатка функција испуњава неки од три услова (а), (б) или (в) из Теореме 143 не захтева експлицитно решавање једначине. ◇

Чест кандидат за V је: $V(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1^2+\dots+a_nx_n^2$, $a_k>0$

$$V(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2, \quad a,b,c>0$$

1) $V\in C^1(\mathbb{R}^3)$ ✓

2) $V(X_*)=0$, $V(x_1,x_2,x_3)>0$, $(x_1,x_2,x_3)\ne X_*$

3) $V'(X) = \langle\nabla V(X), F(X)\rangle = \langle(2ax_1, 2bx_2, 2cx_3), \,---\rangle = 2ax_1\cdot(x_3+1)(2x_2-x_1)+2bx_2\cdot(-x_3-1)(x_1+x_2)+2cx_3(-x_3^3) =$

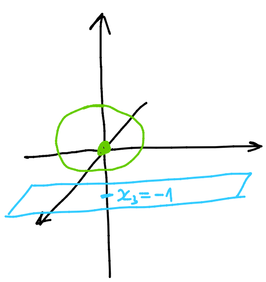
$\nabla V(X) = (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3)$

$$= \underbrace{(x_3+1)}_{>0}\cdot\left(\underbrace{4ax_1x_2}_{\times}\underbrace{-2ax_1^2}_{\le 0}\underbrace{-2bx_2x_1}_{\times}\underbrace{-2bx_2^2}_{\le 0}\right)\underbrace{-2cx_3^4}_{\le 0} < 0$$

у збиру <0

$4ax_1x_2 = 2bx_1x_2$

$\boxed{b=2a}$



$\mathcal{U} = B((0,0,0);\tfrac12)$

На $\mathcal{U}$ важи $x_3+1>0$

$b=2a$

нпр. $a=c=1$, $b=2$: $V(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+2x_2^2+x_3^2$

$V'(X)<0 \xRightarrow[\text{ТЉ}]{} X_*=(0,0,0)$ је АС

5. Доказати да је координатни почетак стабилан, али не и асимптотски стабилан еквилибријум система $X' = AX$, где је $A = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. Испитати стабилност еквилибријума $X^*=(0,0)$ система:

а) $X' = AX + \begin{bmatrix}-x_1^3 - x_1x_2^2\\ -x_2^3 - x_1^2x_2\end{bmatrix}$ б) $X' = AX + \begin{bmatrix}x_1^3 + x_1x_2^2\\ x_2^3 + x_1^2x_2\end{bmatrix}$ в) $X' = AX + \begin{bmatrix}-x_1x_2\\ x_1^2\end{bmatrix}$

[Показати да је у сва три случаја матрица $dF(\mathbf{0})$ једнака и да метод сопствених вредности не даје одговор.]

даље

↳ нпр. под б: $F(x_1,x_2) = \Big[\; -x_2 \;+ x_1^3 + x_1x_2^2$

Показати да је у сва три случаја матрица $\mathrm{d}F(\mathbf{0})$ једнака и да метод сопствених вредности не даје одговор.

домаћи

нпр. под б:

$$F(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} -x_2 + x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ x_1 + x_2^3 + x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$$

$$dF(0) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + x_2^2 & -1 + 2x_1x_2 \\ 1 + 2x_1x_2 & 3x_2^2 + x_1^2 \end{bmatrix}_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

а,в - домаћи

а) $V(x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_2^2 \quad , a,b>0$

$\nabla V(x_1,x_2) = (2ax_1, 2bx_2)$

$$V'(X) = \langle \nabla V, F\rangle = 2ax_1\left(-x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2\right) + 2bx_2\left(x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2\right) =$$

$$= -2ax_1x_2 \underbrace{-2ax_1^4}_{\leq 0} \underbrace{-2ax_1^2x_2^2}_{\leq 0} + 2bx_1x_2 \underbrace{-2bx_2^4}_{\leq 0} \underbrace{-2bx_1^2x_2^2}_{\leq 0}$$

збир < 0

$-2a + 2b = 0 \Rightarrow a = b$

$V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad (a=b=1)$

$V'(X) = -2x_1^4 - 4x_1^2x_2^2 - 2x_2^4 = -2(x_1^2+x_2^2)^2 < 0 \;, \forall (x_1,x_2) \neq X_*$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\; V \text{ је } C^1 \quad \checkmark \\ 2)\; V>0,\, X\neq X_*,\; V=0,\, X=X_* \quad \checkmark \\ 3)\; V'(X)<0,\; \forall X\neq X_* \quad \checkmark \end{array}\right\} \text{AC еквил.}$$

б) $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$V'(X) = \langle \nabla V, F\rangle = \ldots = 2x_1^4 + 2x_2^4 + 4x_1^2x_2^2 = 2(x_1^2+x_2^2)^2 > 0 \Rightarrow X_*$ је нест. еквил.

в) $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$V'(X) = \ldots = 0 \leq 0 \Rightarrow X_*$ је стабилан

6. Испитати стабилност положаја равнотеже $X^* = (0,0)$ динамичког система

$$\begin{aligned} x_1' &= -\sin x_2 \\ x_2' &= x_1. \end{aligned}$$

домаћи: сопс. вр. не дају одговор

$V = ?$ тд. $\langle \nabla V, F\rangle = 0$

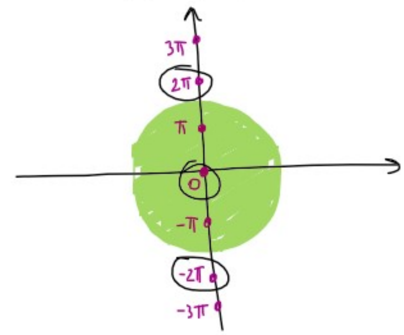
$x_1 \cdot (-\sin x_2) + \sin x_2 \cdot x_1 = 0$

$V'(X) = \langle \nabla V, F\rangle = 0 \leq 0 \Rightarrow$ стабилан

$V = ?$ тд. $\langle \nabla V, F \rangle = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \cdot (-\sin x_2) + \sin x_2 \cdot x_1 = 0 \end{array}\right\} \quad V'(X) = \langle \nabla V, F \rangle = 0 \le 0 \Rightarrow \text{стабилан}$$

$X_* \in \{(0, k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$



$\nabla V = (x_1, \sin x_2)$?

$V = \dfrac{x_1^2}{2} - \cos x_2 + C \rightsquigarrow V(0,0) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{0^2}{2} - \cos 0 + C = 0$

$\underline{C = 1}$

$$V(x_1, x_2) = \underbrace{\frac{x_1^2}{2}}_{\ge 0} + \underbrace{1 - \cos x_2}_{\ge 0}$$

$\cos x_2 = 1$

$x_2 = 2k\pi$

$\underline{U = B(X_*; 2\pi):}$

1) V је C^1 ✓

2) $V(0,0) = 0$, $V(X) > 0$, $X \in U \setminus \{X_*\}$ ✓

3) $V'(X) = 0 \le 0$ ✓

} V је фја Љапунова

$\Rightarrow X_*$ стабилан

(7) $x_1' = x_2 - x_1 x_2^2$

$x_2' = -x_1^3$, $X_* = (0,0)$

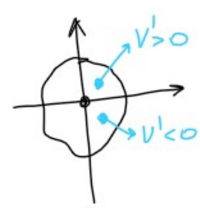
а) $V(x_1, x_2) = a x_1^2 + b x_2^2$ не може користити као фја Љапунова.

б) Потражити фју Љапунова у облику $V(x_1, x_2) = a x_1^4 + b x_2^2$.

а) $V'(X) = \langle \nabla V, F \rangle = \langle (2a x_1, 2b x_2), (x_2 - x_1 x_2^2, -x_1^3) \rangle =$

$= 2a x_1 x_2 - 2a x_1^2 x_2^2 - 2b x_1^3 x_2 =$

$= 2 x_1 x_2 (a - b x_1^2) \underbrace{- 2a x_1^2 x_2^2}_{\le 0}$



$x_1 = x_2 = \varepsilon$: $V'(X) = 2\varepsilon^2 (a - b\varepsilon^2) - 2a\varepsilon^4 =$

$$= 2\varepsilon^2 \underbrace{(a \underbrace{- b\varepsilon^2 - 2a\varepsilon^2}_{\to 0})}_{> 0} > 0$$

$V'(\ldots) \ldots (\ldots) - 2a\varepsilon^4 =$

>0

$x_1=\varepsilon, x_2=-\varepsilon$: $\quad V'(X) = -2\varepsilon^2(a-b\varepsilon^2) - 2a\varepsilon^4 =$

$$= -2\varepsilon^2\underbrace{(a-\underbrace{b\varepsilon^2+a\varepsilon^2}_{\to 0})}_{>0} < 0$$

б) даиати