① Одредити $W^s(X_*)$ и $W^u(X_*)$ за све еквилибријуме X_* система
$$x' = -x$$
$$y' = x^2 + y.$$

$$\phi^t(x,y) = \left(xe^{-t}, ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})\right)$$

$$X_* = ? \quad X' = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{matrix}\right\} x = y = 0 \Rightarrow X_* = (0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$t \to +\infty$: $\quad xe^{-t} \to 0$ ✓

$$ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t}) = \underbrace{e^t\left(y + \frac{x^2}{3}\right)}_{\to 0} + e^{-2t}\left(-\frac{x^2}{3}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

0

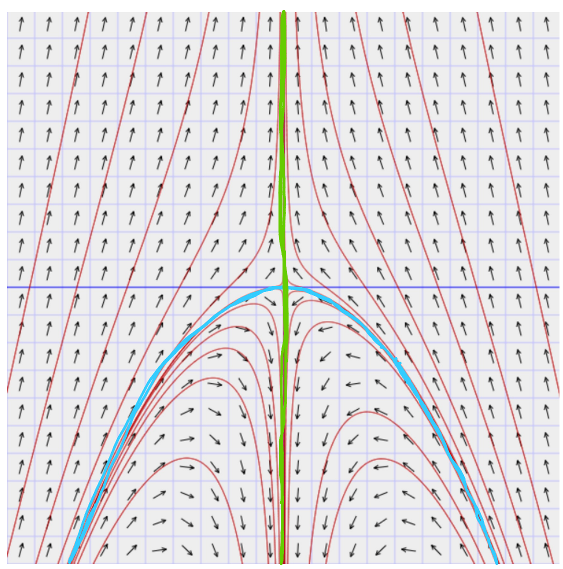
$$\Rightarrow y + \frac{x^2}{3} = 0$$

$$W^s(X_*) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -\frac{x^2}{3} \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

$t \to -\infty$: $\quad e^{-t} \to \infty \Rightarrow x = 0$

$$ye^t \to 0 \ ✓$$

$$W^u(X_*) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$$



Теорема 136. **(Хартмен[2]-Гробман[3])** *Нека је $F(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$ и нека је $A = dF(\mathbf{x}_*)$ хиперболичка матрица. Тада постоји околина $\mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$ на којој су токови система*

$$\underset{(*)}{\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})} \quad u \quad \mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

тополошки еквивалентни. □

↳ линеаризација система (*)

X_* - еквилибријум

$$A = dF(X_*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$A = dF(x_*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_*) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x_*) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_*) \end{bmatrix}$$

$F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

② Доказати да су системи $\begin{cases} x' = \sin x + x + y \\ y' = x + y \end{cases}$ (*) и $\begin{cases} x' = 2022x + y \\ y' = x + y \end{cases}$ (#) топ. еквив. на неком подскупу од $\mathbb{R}^2$.

$F(x,y) = (\sin x + x + y,\ x + y)$

$$X_* = ? \quad \left.\begin{matrix} \sin x + x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \sin x = 0 \\ y = -x \end{matrix}\right\} \Rightarrow X_* \in \{(k\pi, -k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

нпр. $k=0 \Rightarrow X_* = (0,0)$

$$A = dF(X_*) = \begin{bmatrix} \cos x + 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{(x,y)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X' = AX \quad (☆)$$

$\hookrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$

$\lambda_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) = \lambda_{1/2} > 0 \Rightarrow$ хипербол.

$m_+(A) = 2$

ТХГ: $\exists$ околина U од $(0,0)$ на којој су системи (*) и (☆) топ. еквив.

Треба нам (☆) и (#) топ. еквив.

$$B = \begin{bmatrix} 2022 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$D = 2023^2 - 4 \cdot 2021 = (2021 + 2)^2 - 4 \cdot 2021 =$

$= 2021^2 + 4 \cdot 2021 + 4 - 4 \cdot 2021 = 2021^2 + 4$

$\sqrt{D} < 2023$

$\det(B - \lambda E) = 0 \Rightarrow (2022 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2023\lambda + 2021 = 0$

$\lambda_{1/2} = \frac{2023 \pm \sqrt{D}}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) = \lambda_{1/2} > 0 \Rightarrow m_+(B) = 2$

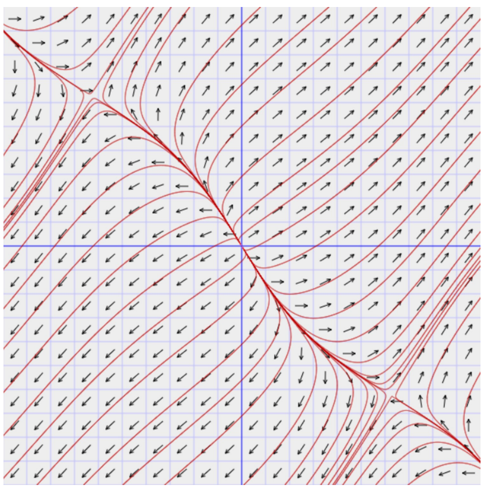
В-хиперб.

$m_+(A)=m_+(B)=2 \Rightarrow$ (☆) и (#) топ. еквив

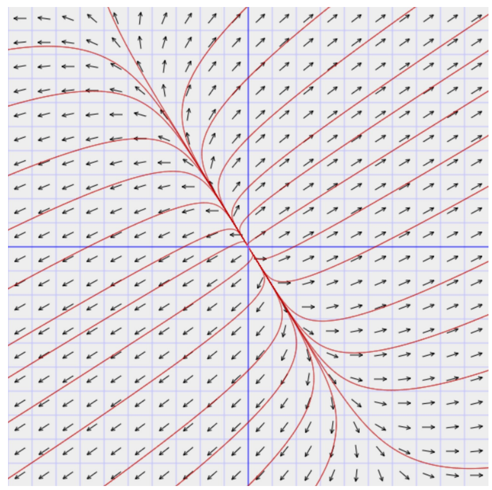
$\Rightarrow$ (*) и (#) топ. еквив.

релација еквив.

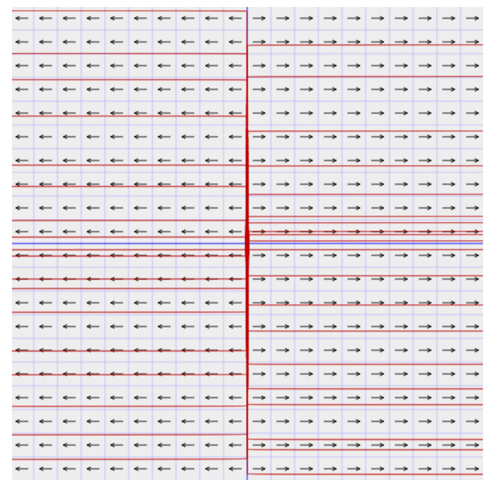
(*)



(☆)



(#)



③ Доказати да систем $\begin{aligned} x' &= x^2 \\ y' &= y \end{aligned}$ није локално топ. еквив. својој линеаризацији у (0,0).

$$F(x,y)=(x^2,y) \Rightarrow A = dF(0,0) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(x,y)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$ A није хиперболичка (не важи ХГ)

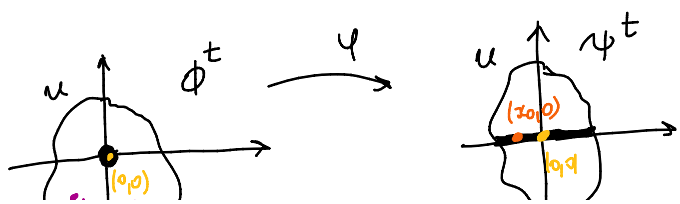
$X' = F(X) \rightsquigarrow \phi^t$ $\qquad$ $X' = AX \rightsquigarrow \psi^t$

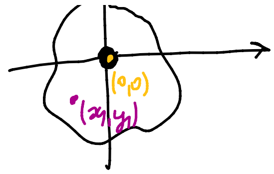
еквилибријуми: $X_* = (0,0)$

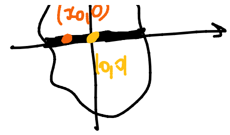
$\left.\begin{aligned} x^2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$

$\left.\begin{aligned} x' &= 0 \\ y' &= y \end{aligned}\right\}$ $\quad \begin{aligned} 0 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$

$X_* \in \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$







ппс $\exists\varphi$ хомео $\varphi\circ\phi^t = \psi^t\circ\varphi$

$\phi^t(0,0) = \psi^t(0,0) = (0,0)$, $\psi^t(x_0,0) = (x_0,0)$, x_0 из неке околине $(0,0)$

φ-бијекција: $\exists(x_1,y_1)$ $\varphi(x_1,y_1) = (x_0,0) \in \mathcal{U}$

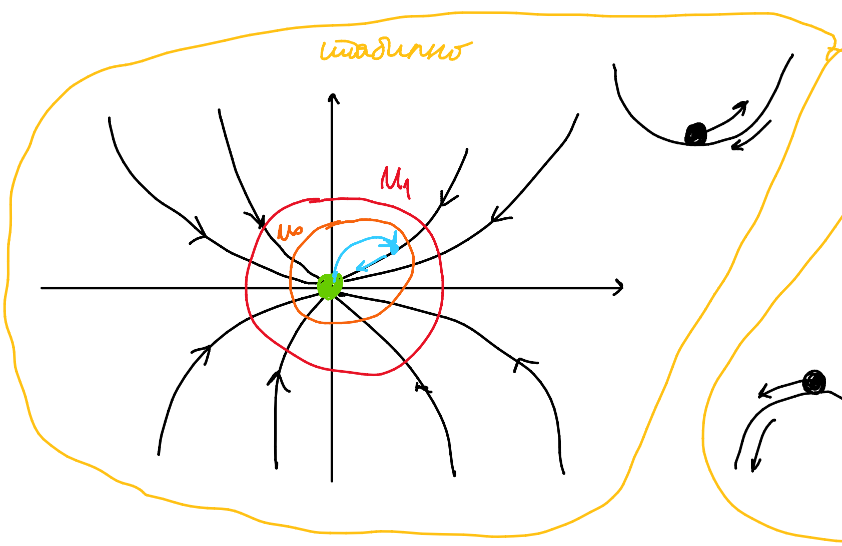
$\varphi\circ\phi^t(x_1,y_1) = \psi^t\circ\varphi(x_1,y_1) = \psi^t(x_0,0) = (x_0,0)$

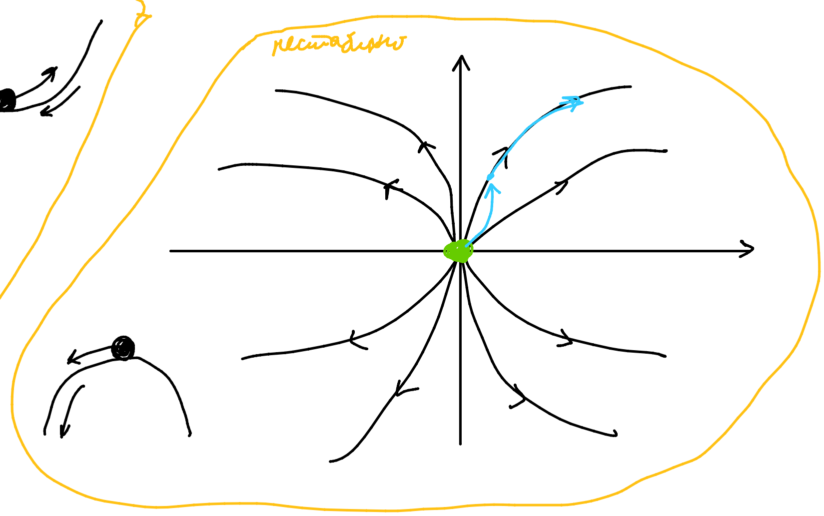
$\Longrightarrow$ $\phi^t(x_1,y_1) = (x_1,y_1) \Rightarrow (x_1,y_1) = (0,0)$

φ је 1-1

x_0 произвољно из неке околине, ово није могуће!

Стабилност еквилибријума ДЈ





Дефиниција 140. Нека је $\mathbf{x}_*$ еквилибријум система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$. Кажемо да је $\mathbf{x}_*$

- *стабилни еквилибријум* ако за сваку околину $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$ постоји околина $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_0 \ni \mathbf{x}_*$, таква да важи
$$\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_1, \quad t \geq 0,$$
где је ϕ^t решење система
$$\frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{Id};$$
- *асимптотски стабилни еквилибријум* ако је стабилни еквилибријум и ако још важи:
$$\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_*;$$
- *нестабилини еквилибријум* ако није стабилни.

по деф.

1. Скицирати фазне портрете динамичких система, а затим испитати стабилност њихових еквилибријума:

а) $x_1' = -x_1 + 2x_2$, $x_2' = -3x_2$ б) $x_1' = -x_1 + 3x_2$, $x_2' = 5x_1 - 3x_2$ в) $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$.

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

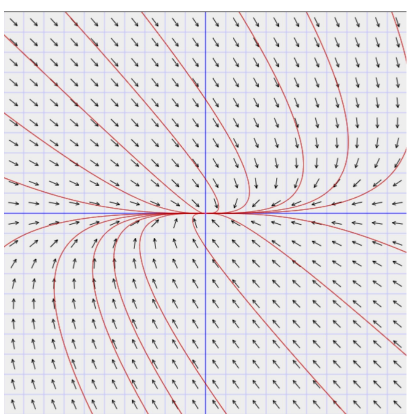
$X_* = (0,0)$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = -3$

$\phi^t(x) = e^{tA} \cdot x = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot x$

стабилан чвор



$\mathcal{U}_0 = \mathbb{R}^2$

$t \to \infty: \ \phi^t(x) = 0 \cdot x \to (0,0) = X_*$

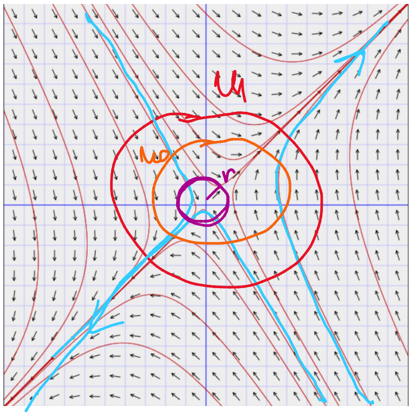
$\Rightarrow$ асимптотски стабилан

б) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

$X_* = (0,0)$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = -6$ седло



– делује да нису стабилне

$$\phi^t(x) = \frac{1}{8}\cdot\begin{bmatrix} 5e^{2t}+3e^{-6t} & 3e^{2t}-3e^{-6t} \\ 5e^{2t}-5e^{-6t} & 3e^{2t}+5e^{-6t}\end{bmatrix}\cdot x$$

нестабилан

$$\Longleftrightarrow$$

$(\exists U_1)(\forall U_0)\ x_0\in U_0 \wedge \phi^t(x_0)\notin U_1$ (за неко $t\geq 0$)

U_1, U_0 – произвољни, $U_0 \subseteq U_1$, $(\exists r>0)\ B(X_*;r)\subseteq U_0$

$$x_0 = \begin{bmatrix} r/2 \\ 0 \end{bmatrix} \in B(X_*;r)\subseteq U_0$$

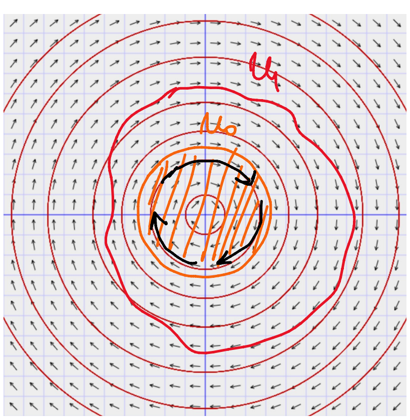
$$\phi^t(x_0) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} r/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty}\|\phi^t(x_0)\| = \frac{r}{16}\cdot\lim_{t\to\infty}\|(\overset{+\infty}{5e^{2t}}+\overset{-\infty}{3e^{-6t}},\ \overset{+\infty}{5e^{2t}}-\overset{-\infty}{5e^{-6t}})\| = \infty$$

$\Rightarrow (\exists t\geq 0)\ \phi^t(x_0)\notin U_1 \Rightarrow$ нестабилан

в) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \phi^t(x) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\cdot x$

$\lambda_{1/2} = \pm i$



$\|\phi^t(x)\| = \|x\|$ → проверити

U_1 – произв.

$\exists r>0$, $B(X_*;r)\subseteq U_1$

$U_0 = B(X_*;r)$

$x_0\in U_0 \Rightarrow \phi^t(x_0)\in U_0\subseteq U_1 \Rightarrow$ стабилан

није асимптотски стабилан: $\lim_{t\to\infty}\phi^t(x) \neq X_*$