1 - четвртак 10.03.2022.

Подсећање: ток $X' = F(t,X)$

Φ^t - ток: $\frac{d}{dt}\Phi^t(x) = F(t, \Phi^t(x))$

$\Phi^0(x) = x$

① Наћи ток $x' = -x$

$y' = x^2 + y$

$x(t) = c_1 e^{-t}$, $c_1 \in \mathbb{R}$

$y' = c_1^2 e^{-2t} + y$ (линеарна)

$\vdots$

$y(t) = c_2 e^{t} - \frac{c_1^2}{3} e^{-2t}$, $c_2 \in \mathbb{R}$

$x(0) = x_0 \Rightarrow c_1 = x_0$

$y(0) = y_0 \Rightarrow c_2 - \frac{x_0^2}{3} = y_0 \Rightarrow c_2 = y_0 + \frac{x_0^2}{3}$

$$\Phi^t(x,y) = \left(x e^{-t}, \left(y + \frac{x^2}{3}\right)e^{t} - \frac{x^2}{3}e^{-2t}\right)$$

② Доказати да је $\Phi^t(x) = e^{tA}\cdot x$ ток за ЛСДЈКК $X' = AX$.

$F(X) = A \cdot X$

1) $\frac{d}{dt}\Phi^t(x) = F(\Phi^t(x))$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\cdot x\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)\cdot x = A \cdot e^{tA}\cdot x = A\cdot\Phi^t(x) = F(\Phi^t(x))$$

2) $\Phi^0(x) = e^{0\cdot A}\cdot x = e^{0}\cdot x = E\cdot x = x$

Еквивалентност система (класификација)

Нека су дате области $\mathcal{U},\mathcal{W}\subset\mathbb{R}^n$ и $X:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$, $Y:\mathcal{W}\to\mathbb{R}^n$ глатка векторска поља на њима. Кажемо да су фазни токови ϕ^t и ψ^t дефинисани једначинама

$$\frac{d\phi^t}{dt}=X(\phi^t),\quad \phi^0=\mathrm{Id}$$
$$\frac{d\psi^t}{dt}=Y(\psi^t),\quad \psi^0=\mathrm{Id}$$

конјуговани или *еквивалентни*[1] ако постоји бијекција

$$\varphi:\mathcal{U}\to\mathcal{W}$$

таква да важи

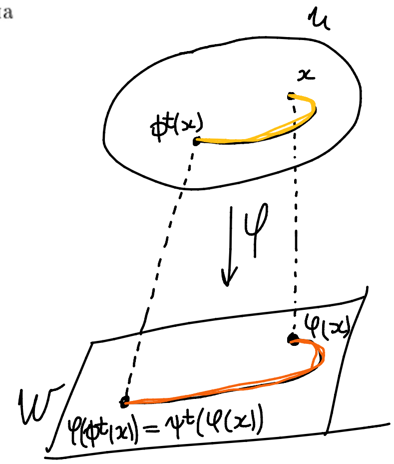
$$\varphi\circ\phi^t=\psi^t\circ\varphi. \qquad \phi^t=\varphi^{-1}\circ\psi^t\circ\varphi$$

Ако је још и:

- φ линеарно, кажемо да су токови ϕ^t и ψ^t *линеарно еквивалентни*;
- φ хомеоморфизам, кажемо да су токови ϕ^t и ψ^t *тополошки еквивалентни*;
- φ дифеоморфизам, кажемо да су токови ϕ^t и ψ^t *диференцијално еквивалентни*.

Користићемо термин еквивалентни и за саме системе, а не само за токове.

– рел. еквиваленције!



φ лин: $\varphi(ax+by)=a\varphi(x)+b\varphi(y)$

φ хомео: φ,φ^{-1} непр.

φ дифео: φ,φ^{-1} диф.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\phi^t"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ W \arrow[r, "\psi^t"'] & W \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{линеарно} \Rightarrow \text{диф.} \Rightarrow \text{топол.}}$

Теореме за ЛСДЈКК ($X'=AX$, $X'=BX$):

1) Л $\Leftrightarrow$ Д $\Rightarrow$ Т

2) Л $\Leftrightarrow$ A,B сличне

3) A,B хиперболичке матрице ($Re(\lambda)\neq 0$, $\forall\lambda$ – сопс. вр.)

Т $\Leftrightarrow$ $m_+(A)=m_+(B)$

↳ бр. сопс. вр. λ тд. $Re(\lambda)>0$

③ Доказати да системе $\begin{aligned}x'&=x\\ y'&=y\end{aligned}$ и $\begin{aligned}x'&=x\\ y'&=x+y\end{aligned}$ нису лин. еквив. иако имају исте сопс. вр.

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$$

$\lambda_1=\lambda_2=1$ $\qquad$ $\lambda_1=\lambda_2=1$

ЛПС јесу Л еквив. $\Leftrightarrow A\sim B \Leftrightarrow \exists P\in GL_2(\mathbb{R})$, $A=PBP^{-1}\ /\cdot P$

ппс јесу Λ екв. $\Leftrightarrow A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in GL_2(\mathbb{R}),\ A = PBP^{-1} \ /\cdot P$

$P^{-1}\cdot$

$$\Downarrow E = A$$

$$\underbrace{P^{-1}EP}_{E} = B$$

$$B = E \ \lightning$$

④ Доказати да су системи $\begin{matrix} x' = -x \\ y' = x^2 + y \end{matrix}$ и $\begin{matrix} x' = -x \\ y' = y \end{matrix}$ диф. екв., али нису лин. екв.

1

Токови: $\phi^t(x,y) = \left(xe^{-t},\ ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})\right)$, $\psi^t(x,y) = e^{t\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (xe^{-t}, ye^t)$.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$

$$\varphi \circ \phi^t = \psi^t \circ \varphi$$

$$\varphi\left(xe^{-t},\ ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})\right) = \left(\varphi_1(x,y)e^{-t},\ \varphi_2(x,y)e^t\right)$$

Нису лин. екв: ппс, јесу $\Lambda \Rightarrow \exists \varphi$ лин.

$$\varphi(x,y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\overset{\varphi_1(x,y)}{\overset{\shortparallel}{\alpha x + \beta y}},\ \overset{\varphi_2(x,y)}{\overset{\shortparallel}{\gamma x + \delta y}})$$

$$\alpha x e^{-t} + \beta y e^t + \frac{\beta x^2}{3}(e^t - e^{-2t}) = (\alpha x + \beta y)e^{-t} \ /\cdot e^t$$

$$\gamma x e^{-t} + \delta y e^t + \frac{\delta x^2}{3}(e^t - e^{-2t}) = (\gamma x + \delta y)e^t \ /\cdot e^{-t}$$

$$\alpha x + \beta y e^{2t} + \frac{\beta x^2}{3}(e^{2t} - e^{-t}) = \alpha x + \beta y \qquad \forall t, x, y$$

$$\gamma x e^{-2t} + \delta y + \frac{\delta x^2}{3}(1 - e^{-3t}) = \gamma x + \delta y$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha x = \alpha x + \beta y \\ \beta y + \frac{\beta x^2}{3} = 0 \\ -\frac{\beta x^2}{3} = 0 \end{matrix}\right\} \quad \beta y = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

$$\left.\begin{matrix} \gamma x = 0 \\ \delta y + \frac{\delta x^2}{3} = \gamma x + \delta y \end{matrix}\right\} \boxed{\gamma = \delta = 0}$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma x = 0 \\ &\delta y + \frac{\delta x^2}{3} = \gamma x + \delta y \\ &-\frac{\delta x^2}{3} = 0 \end{aligned}\right\} \boxed{\gamma = \delta = 0}$$

$\varphi(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = (\alpha x, 0)$ → није бијекција на $\mathbb{R}^2$

$(0,1) \notin \operatorname{Im}\varphi$

Јесу диф. еквив.: $\varphi\left(xe^{-t}, ye^{t} + \frac{x^2}{3}(e^{t} - e^{-2t})\right) = \left(\varphi_1(x,y)e^{-t}, \varphi_2(x,y)e^{t}\right)$

$$\left(\varphi_1\left(xe^{-t}, ye^{t} + \frac{x^2}{3}(e^{t} - e^{-2t})\right), \varphi_2\left(xe^{-t}, ye^{t} + \frac{x^2}{3}(e^{t} - e^{-2t})\right)\right) = \left(\varphi_1(x,y)e^{-t}, \varphi_2(x,y)e^{t}\right)$$

$$\varphi_1\left(xe^{-t}, ye^{t} + \frac{x^2}{3}(e^{t} - e^{-2t})\right) = \varphi_1(x,y)e^{-t}$$

$$\varphi_2\left(xe^{-t}, ye^{t} + \frac{x^2}{3}(e^{t} - e^{-2t})\right) = \varphi_2(x,y)e^{t}$$

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ – нађемо

$\varphi_1(x,y) = x$

$$\varphi_1\left(xe^{-t}, ye^{t} + \frac{x^2}{3}(e^{t} - e^{-2t})\right) = xe^{-t} = \varphi_1(x,y)e^{-t} \checkmark$$

$$\varphi_2(x,y) = y + \frac{x^2}{3}$$

$$\varphi_2\left(xe^{-t}, ye^{t} + \frac{x^2}{3}(e^{t} - e^{-2t})\right) = ye^{t} + \frac{x^2}{3}(e^{t} - e^{-2t}) + \frac{x^2e^{-2t}}{3} = \left(y + \frac{x^2}{3}\right)e^{t} = \varphi_2(x,y)e^{t}$$

$\varphi(x,y) = \left(x, y + \frac{x^2}{3}\right)$ – дифео?

1-1: $\varphi(x_1,y_1) = \varphi(x_2,y_2)$

$$\left(x_1, y_1 + \frac{x_1^2}{3}\right) = \left(x_2, y_2 + \frac{x_2^2}{3}\right) \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ y_1 &= y_2 \end{aligned}$$

на: $\varphi(x,y) = (s,t)$

$$\left(x, y + \frac{x^2}{3}\right) = (s,t)$$

$x = s$

$$\varphi\left(s, t - \frac{s^2}{3}\right) = (s,t)$$

$$y = t - \frac{x^2}{3} = t - \frac{s^2}{3}$$

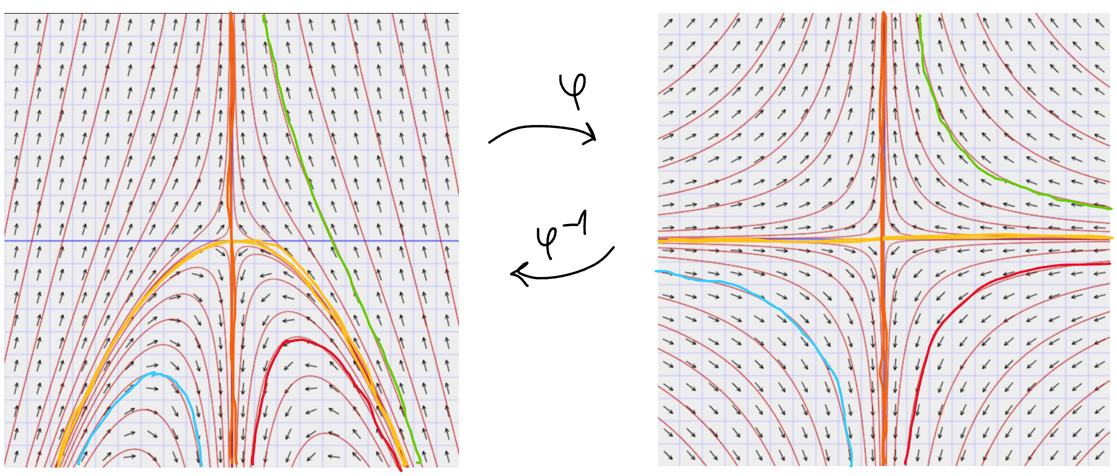
$$\varphi^{-1}(s,t) = \left(s, t - \frac{s^2}{3}\right)$$

φ, φ^{-1} диф: да, јер су полиноми

$$\left(d\varphi(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3}x & 1 \end{bmatrix}, \quad d(\varphi^{-1})(s,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3}s & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$\Rightarrow$ системи су диф. еквив.

ϕ^t ψ^t



$$\varphi(x,y) = \left(x, y + \frac{x^2}{3}\right)$$

$$\varphi^{-1}(s,t) = \left(s, t - \frac{s^2}{3}\right)$$

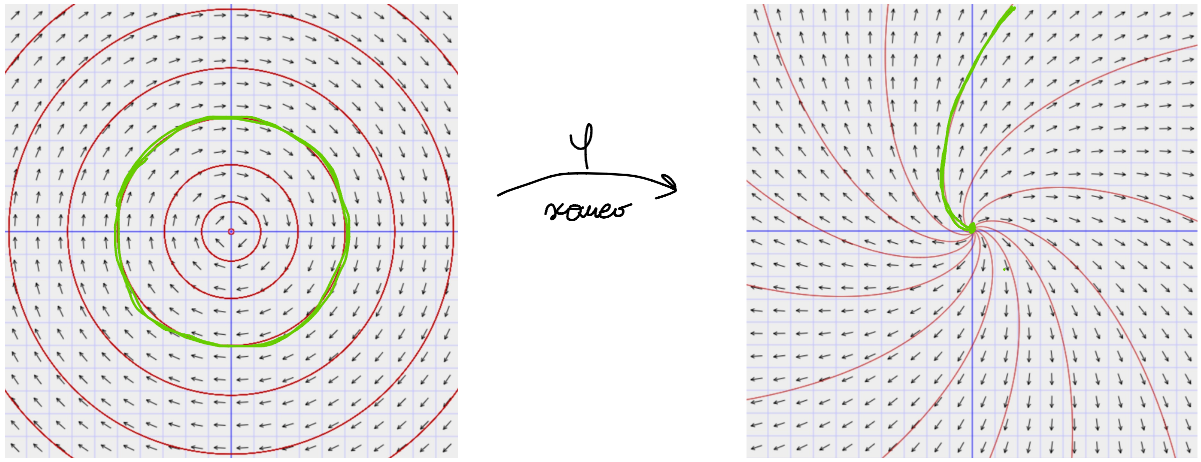
$\varphi^{-1}(s,0) = \left(s, -\frac{s^2}{3}\right)$ $\varphi^{-1}(0,t) = (0,t)$

5 Да ли су системи $X' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} X$ и $X' = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{B} X$ топ. еквив?

$\lambda_{1/2} = \pm i$ $\lambda_{1/2} = 2 \pm i$

$Re(\pm i) = 0$

$\Rightarrow$ A није хиперболичка (не може Т)



Проблем: не можемо да разбијемо кругове

Напомена 123. Ако са $\gamma_{\phi^t}(\mathbf{x})$ означимо трајекторију тачке $\mathbf{x}$:

$$\gamma_{\phi^t}(\mathbf{x}) := \{\phi^t(\mathbf{x}) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

тада је очигледно да, за еквивалнтне токове ϕ^t и ψ^t, бијекција φ слика трајекторију тачке $\mathbf{x}$ на трајекторију тачке $\varphi(\mathbf{x})$:

$$\varphi(\gamma_{\phi^t}(\mathbf{x})) = \gamma_{\psi^t}(\varphi(\mathbf{x})).$$

ППС $\exists$ φ-хомео, $\varphi(\circledcirc) =$ $\Rightarrow$ $O \approx$ ↯

(O је компактан, није)

[или: лево су периодичне трај, десно нису]

⑥ Доказати да тополошка класификација не важи за нехиперболичке матрице.

$$\phi^t \to A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \psi^t$$

$\lambda_{1/2} = \pm i$ $\qquad$ $\lambda_{1/2} = \pm 2i$

ни A, ни B није хиперб.

$$m_+(A) = m_+(B) = 0$$
$$m_-(A) = m_-(B) = 0$$

треба: токови нису T еквив.

$$\phi^t(x) = e^{tA}\cdot x = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\cdot x \longrightarrow \text{трај. периода } 2\pi$$

$$\psi^t(x) = e^{tB}\cdot x = \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}\cdot x \longrightarrow \text{трај. периода } \pi$$

} неће моћи

<u>ппс</u> $\exists \varphi$-хомео

$$\varphi \circ \phi^t = \psi^t \circ \varphi$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\cdot x\right) = \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}\cdot \varphi(x)$$

$t=\pi$: $$\varphi\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot x\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot \varphi(x) = \varphi(x)$$

$$\varphi(-x) = \varphi(x) \underset{1-1}{\Rightarrow} -x = x \Rightarrow x = 0 \ \lightning \quad (\forall x\in\mathbb{R})$$

Стабилна и нестабилна многострукост

за ЛСАЈКК: $X' = AX$

$$W^s(A) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to\infty} e^{tA}\cdot x = 0\} \quad \text{- стабилна}$$

$$W^u(A) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to-\infty} e^{tA}\cdot x = 0\} \quad \text{- нестабилна}$$

спец.: $X_* = 0$ за $F(X) = AX$

општије: за X_* еквилибријум система $X' = F(X)$: $(F(X_*) = 0)$

$$W^s(X_*) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to\infty} \phi^t(x) = X_*\}$$

$$W^u(X_*) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to-\infty} \phi^t(x) = X_*\}$$

7) Наћи $W^s(A)$ и $W^u(A)$ за $X' = AX$ за:

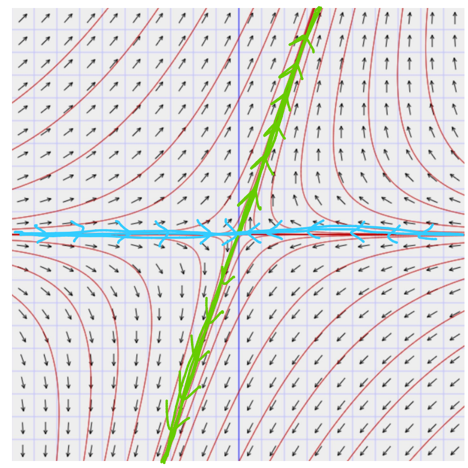
а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ б) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

a) $\phi^t(x) = e^{tA}\cdot x = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{1}{3}(e^{2t}-e^{-t}) \\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1e^{-t}+\frac{x_2}{3}(e^{2t}-e^{-t}) \\ x_2 e^{2t}\end{bmatrix}$

$t\to+\infty$: $\quad x_1e^{-t}+\frac{x_2}{3}(e^{2t}-e^{-t}) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \Rightarrow x_1 e^{-t}\xrightarrow[t\to\infty]{}0$ ✓

$\quad x_2e^{2t}\xrightarrow[t\to\infty]{}0 \Rightarrow x_2=0$

$$W^s(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle|\ x_1\in\mathbb{R}\right\}$$



$t\to-\infty$: $\quad x_2e^{2t}\xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$ ✓

$\underset{\to\infty}{e^{-t}}\underbrace{\left(x_1-\frac{x_2}{3}\right)}_{=0}+\underbrace{e^{2t}\cdot\frac{x_2}{3}}_{✓} \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{3}$

$$W^u(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{x_2}{3} \\ x_2 \end{bmatrix} \middle|\ x_2\in\mathbb{R}\right\}$$

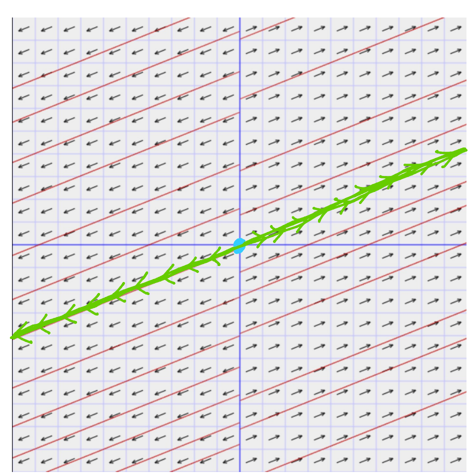
b) $e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ \frac{2}{5}(e^{5t}-1) & 1\end{bmatrix}$

$\phi^t(x) = e^{tA}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5t}x_1 \\ \frac{2}{5}(e^{5t}-1)x_1+x_2\end{bmatrix}$

$t\to+\infty$, $\quad e^{5t}\to\infty \Rightarrow x_1=0$

$\quad \frac{2}{5}(e^{5t}-1)x_1+x_2 = x_2 \to 0 \Rightarrow x_2=0$

$$W^s(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$



$t\to-\infty$, $\quad e^{5t}\cdot x_1\to 0$ ✓

$\quad \frac{2}{5}(e^{5t}-1)x_1+x_2 \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\frac{2}{5}x_1+x_2 = 0$

$\quad x_2 = \frac{2}{5}x_1$

$$W^u(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{2}{5}x_1 \end{bmatrix} \middle|\ x_1\in\mathbb{R}\right\}$$