Задаци за вежбање из ДЈА за М смер 2021/2022

асистент: Душан Дробњак

(I) Једначине које се директно решавају

ДЈ која раздваја промењљиве и једначине које се своде на њу, линеарна ДЈ и једначине које се своде на њу, смене, ДЈ са тоталним диференцијалом и интеграциони фактор, скицирање решења

1. За $\alpha > 0$ дата је диференцијална једначина

$$\frac{xx'}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{8t^2+x^2+1}{2t^2+x^2+1}. \tag{$\star$}$$

   (а) Трансформисати једначину ($\star$) сменом $v(t) = \sqrt{x(t)^2+\alpha}$.

   (б) Решити једначину ($\star$) за једно $\alpha > 0$ по избору.

2. Наћи Кошијева решења диференцијалне једначине $x'' + t^5x' = t^5\,(x')^7$ са условима

   (а) $x(2) = 3$, $x'(2) = 1$;

   (б) $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

3. Две шоље топлог чаја познатих почетних температура $T_1(0) = T_2(0) = T_0$ су остављене да се хладе на собној температури T_∞ (таквој да важи $T_\infty < T_0$). Прва шоља се остави недирнута и промена њене температуре $T_1(t)$ у времену се може моделовати Њутновим законом хлађења

$$\frac{dT_1(t)}{dt} = -a(T_1(t) - T_\infty),$$

   где је $a > 0$ дата константа која зависи од структуре шоља и геометрије поставке. У другу шољу се од тренутка $t = 1/a$ почне сипати вода константном брзином која је све топлија и топлија (линеарно са временом) и промена њене температуре $T_2(t)$ у времену (за $t \neq 1/a$) се може моделовати као

$$\frac{dT_2(t)}{dt} = -a(T_2(t) - T_\infty) + tH(t - 1/a),$$

   где је са H означена Хевисајдова функција $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

   (а) Наћи температуре чаја у обе шоље, $T_1(t)$ и $T_2(t)$, за време $t \geqslant 0$, претпостављајући да је температура непрекидна функција од времена. Претпоставити да су константе T_0, T_∞, a познате.

   (б) Описати шта се дешава са овим температурама после довољно много времена (када $t \to \infty$).

4. Дата је диференцијална једначина $(t+2x)x' = kx - \frac{2}{t}(x^m + tx) - t$.

   (а) Наћи један пар вредности $(k, m) \in \mathbb{Z}^2$ тако да се сменом $y = x^m + tx$ једначина своди на линеарну диференцијалну једначину и решити је у том случају.

   (б) Наћи све парове $(k, m) \in \mathbb{Z}^2$ за које једначина постаје једначина тоталног диференцијала и решити је у тим случајевима.

5. Скицирати поље праваца и интегралне криве диференцијалне једначине $x' = \frac{2t}{x}$, не решавајући је. Посебно издвојити (означити) на скици по један пример за следећа решења (у смислу реалних функција):

   (а) Решење које је дефинисано за свако $t \in \mathbb{R}$;

   (б) Решење које је део праве.

   За које захтеве од (а) и (б) постоји јединствено решење, а за које више њих?

6. Решити диференцијалну једначину $3x^3 - e^{-3tx} + (2x + 3tx^2)x' = 0$, а затим наћи партикуларно решење које је тангентно на праву $x = 1$.

7. Наћи решење диференцијалне једначине $tx' = \sin t - 2x$ које пролази кроз тачку $(\pi/2, 0)$. Који је интервал дефинисаности тог решења?

8. Решити диференцијалну једначину $\left(x\operatorname{tg} t + \frac{e^{tx}}{\cos^2 t}\right)\mathrm{d}t + t\operatorname{tg} t\,\mathrm{d}x = 0$.

9. Који је интервал дефинисаности решења диференцијалне једначине $t^3x' + t^2x - x^2 = 2t^4$ за које важи $x(1) = 3/2$?

10. Решити диференцијалну једначину $t\ln tx' \operatorname{tg} x + 1 - t\cos x = 0$.

11. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$2\sqrt{xt} = \frac{x - tx'}{x}$$

на области $\{t > 0, x > 0\}$. Наћи и партикуларно решење које тангира параболу $x = t^2$.

12. Решити диференцијалну једначину $2tx^3 - 2t^3x^3 - 4tx^2 + 2t + (3t^2x^2 + 4x)x' = 0$.

(II) **Линеарне диференцијалне једначине**

Скицирање фазних портрета линеарних система ДЈ са константним коефицијентима у равни, експонент матрице, експонент матрице, линеарни системи ДЈ са константним коефицијентима, фундаментална матрица, линеарне ДЈ са константним коефицијентима

1. Скицирати фазни портрет система $X' = AX$, ако је

   (а) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$; (б) $A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}$, где су $\alpha, \beta > 0$. Решити систем $X' = AX$, скицирати фазни портрет, и у зависности од почетне вредности $X(0) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, наћи $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t)$.

3. Дат је систем диференцијалних једначина $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + 2x_2 \\ -3x_2 \end{bmatrix}$. У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ одредити тип фазног портрета датог система и скицирати фазни портрет по једног представника.

4. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} e & 0 & e \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$.

   (а) Решити систем $X' = AX$.

   (б) Испитати да ли систем $X' = \left(e^A\right)^2 X$ чува запремину.

   (в) Наћи барем једну матрицу B тако да важи $e^B = A$ или доказати да таква не постоји.

5. Дата је диференцијална једначина $X' = AX$, где је

$$A = \begin{bmatrix} \star & 2 & \star \\ \star & -3 & \star \\ \star & \star & -3 \end{bmatrix}.$$

   (а) Заменити $\star$ у матрици A бројевима тако да једно решење једначине буде $X(t) = \begin{bmatrix} e^t - e^{-5t} \\ e^t + e^{-5t} \\ e^t \end{bmatrix}$.

   (б) Наћи опште решење дате једначине (са матрицом добијеном у делу под (а).

   (в) Наћи сва решења система за која важи $X'(0) = 2X(0)$.

6. Дат је Кошијев проблем $X'(t) = AX(t) + B(t)$, $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, где је $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

   (а) Решити дати Кошијев проблем ако је $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(б) Решити дати Кошијев проблем ако је $B(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-t \\ 2 \end{bmatrix}$, знајући да се једно решење система може наћи у облику вектора чији су елементи полиноми по t.

7. (а) Одредити сва решења следећих једначина у скупу реалних квадратних матрица:

(1) $A^2e^A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; (2) $e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(б) Решити Кошијев проблем $X' = e^{-A}X$, $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, где је матрица A решење једначине из дела (2), уколико таква матрица постоји.

8. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, где је $a \in \mathbb{R}$.

(а) Одредити параметар a тако да за матрицу A важи $\det\left(\left(\frac{d}{dx}e^{Ax}\right)|_{x=2}\right) = 8e^{12}$.

(б) За матрицу A из дела (а), решити систем једначина $X' = AX$.

9. Дат је линеаран систем диференцијалних једначина у матричном облику $Y'(x) = A(x)Y(x)$. Познато је да је једна фундаментална матрица овог система дата са $\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 1 & -e^x \end{bmatrix}$.

(а) Одредити опште решење датог система диференцијалних једначина.

(б) Одредити партикуларно решење датог система диференцијалних једначина за које важи $Y(1) = \begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix}$.

(в) Одредити матрицу система $A(x)$.

(г) Доказати да не постоји матрица $B \in M_2(\mathbb{R})$ за коју важи $e^{xB} = \Phi(x)$.

(д) Решити систем $X'(t) = A(0)X(t)$. Одредити положај тачке $X(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ после времена $\Delta t = 1$, тј. вредност $X(t_0 + \Delta t)$.

10. Наћи опште решење диференцијалне једначине $(x'' - 2x' - 3x)' = -16e^{-t} + 16te^{-t}$. Наћи и сва решења за која важи $x(0) = 1$ и која имају хоризонталну асимптоту кад $x \to +\infty$.

(III) **Теореме**

Пикарова и Пеанова теорема, Лиувилова теорема

1. Дат је почетни проблем $x' = \frac{\chi_{[0,2]}(x)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{t-3}$, $x(0) = x_0$, $t \in [0,1]$, где је χ_A карактеристична функција скупа A. Проверити да ли су испуњени услови Пикарове теореме, ако је:

(а) $x_0 = 1$,

(б) $x_0 = 2$,

(в) $x_0 = 3$.

2. Дат је Кошијев проблем $x' = x - t + 1$, $x(t_0) = x_0$.

(а) Доказати да су за произвољне t_0 и x_0 задовољени услови Пикарове теореме.

(б) Формирати итеративни низ функција из доказа Пикарове теореме и на тај начин одредити решење у случају $t_0 = 0$ и $x_0 = 1$.

3. Нека је $P(t)$ неконстантан полином. Да ли функција $x(t) = (t-1)^2P(t)$ може бити решење диференцијалне једначине $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ дефинисано на некој отвореној околини тачке $t = 1$, ако су $a(t)$ и $b(t)$ непрекидне функције?
Помоћ: Зашто овде важи Пикарова теорема? Посматрати почетни проблем $x(1) = x'(1) = 0$.

4. Испитати егзистенцију и јединственост решења Кошијевог проблема $x' = |x| \cos t$, $y(0) = 0$, не решавајући диференцијалну једначину.

5. Одредити које све типове фазних портрета може да има систем $X' = AX$, $A \in M_2(\mathbb{R})$, ако за њега важи да чува запремину. Навести по један пример за сваки такав тип.

(IV) **Токови и векторска поља**

Токови, једнопараметарске фамилије, векторска поља и комутатор

1. Дато је векторско поље $X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ и пресликавање $\psi_t : (x, y) \mapsto (\cos tx + \sin ty, -\sin tx + \cos ty)$. Наћи ток ϕ_t које је одређен векторским пољем X и векторско поље Y које одређује ток ψ_t. Наћи $(\phi_t)_* X$ и $(\phi_t)_* Y$. Да ли токови ϕ и ψ комутирају?

2. Дата су векторска поља $X = \frac{\partial}{\partial z}$ и $Y = z\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}$ у $\mathbb{R}^3$.

   (а) Израчунати комутаторе $[X, Y]$ и $[Y, [Y, X]]$.

   (б) Наћи токове за векторска поља X и Y. Да ли ти токови комутирају? Испитати по дефиницији да ли су ти токови једнопараметарске фамилије?

   (в) Да ли постоји површ $\mathcal{S}$ у $\mathbb{R}^3$ тако да су векторска поља X и Y тангентна на $\mathcal{S}$?

3. Дата су векторска поља $X = x\frac{\partial}{\partial x} + (x + y)\frac{\partial}{\partial y}$ и $Y = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ у $\mathbb{R}^2$. Да ли постоји дифеоморфизам φ и околина U тачке (x_0, y_0) такви да је $\varphi_* X = \frac{\partial}{\partial x}$ на U? Да ли постоје дифеоморфизам ψ и околина U тачке (x_0, y_0) такви да је $\psi_* X = \frac{\partial}{\partial x}$ и $\psi_* Y = \frac{\partial}{\partial y}$ на U?