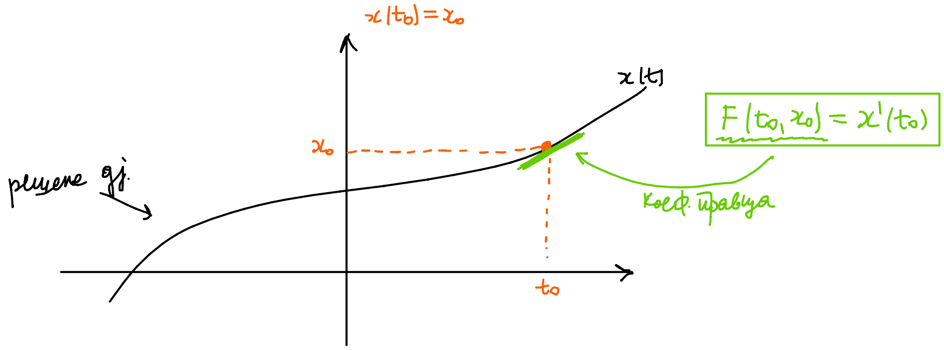
① Скицирати $\boxed{\text{поље праваца}}$ дј. $x'=F(t,x)$. Не решавајући дј. скицирати њене $\boxed{\text{интегралне криве}}$.

(решења)

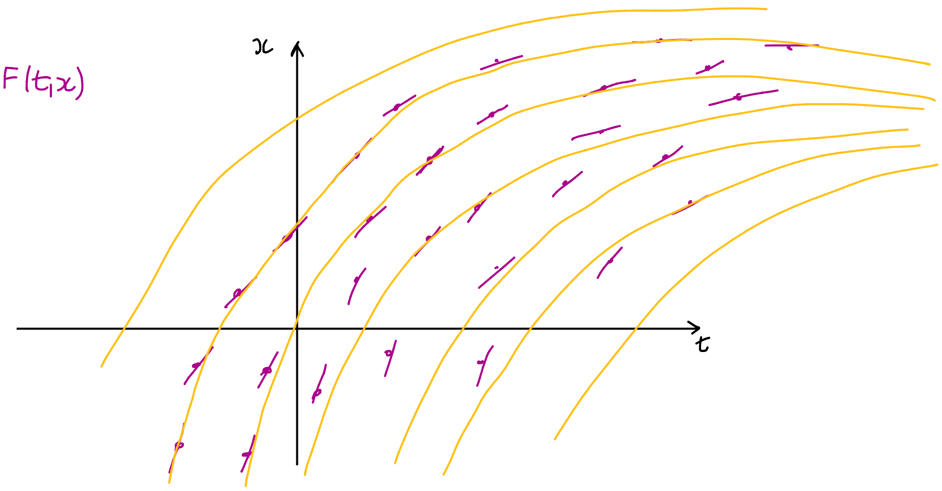
а) $F(t,x) = -\frac{t}{x}$

б) $F(t,x) = 1+t-x$



• поље праваца → $F(t,x)$

• интегралне криве



а) $F(t,x) = -\frac{t}{x}$

сви (t,x) т.д. $x'(t) = F(t,x) = \underbrace{c}_{\text{нагиб}} \in \mathbb{R}$ (изоклина)

$-\frac{t}{x} = c \Rightarrow \underbrace{c \cdot x = -t}$

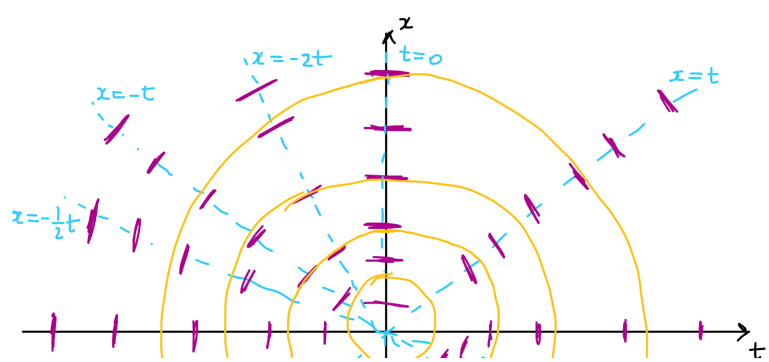
↳ праве кроз $(0,0)$

$c=0$: , $t=0$:

$c=1$: , $x=-t$:

$c=-1$: , $x=t$:

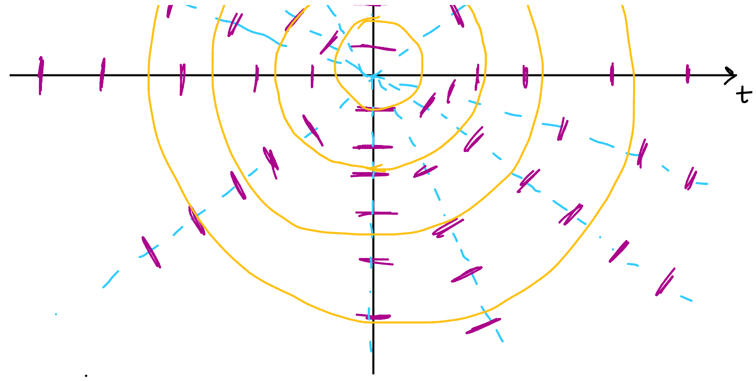
$c=1$: , $x=-1t$:



$c = 2:$, $x = -\frac{1}{2}t:$

$c = \frac{1}{2}:$, $x = -2t:$

$c = -\frac{1}{2}$, $c = -2$, $c = -3$, ...



интегралне криве су кругови

б) $F(t, x) = 1 + t - x$

$1 + t - x = c$

$x = t + (1 - c) \rightarrow$ праве $\parallel$ са $x = t$

$C = 0:$, $x = t + 1$

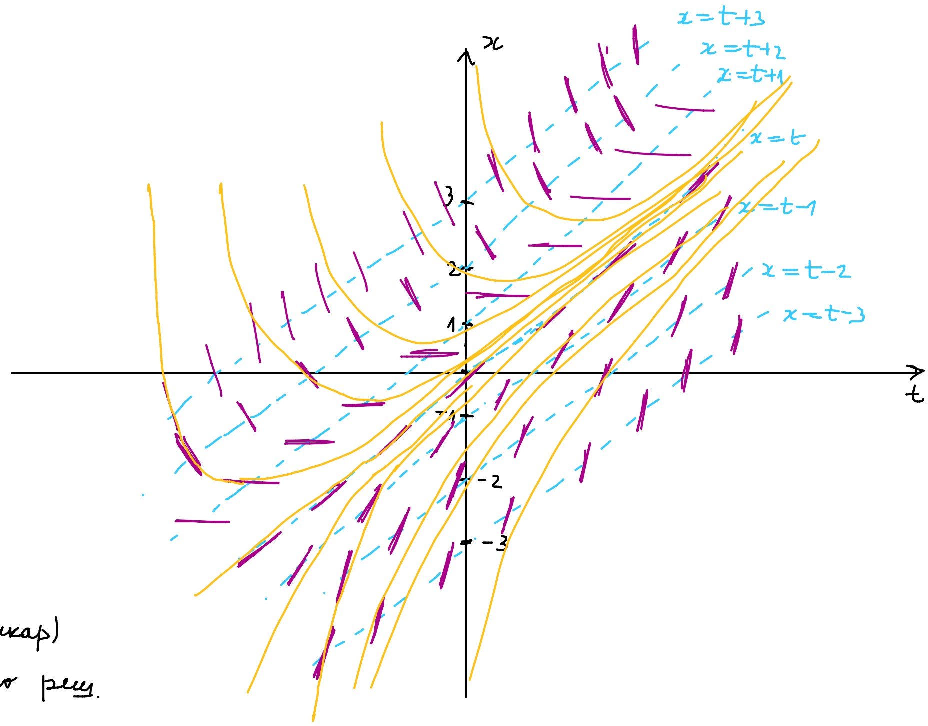
$c = 1:$, $x = t$ ← дуж праве

$c = 2:$, $x = t - 1$

$c = 3:$, $x = t - 2$

$c = -1:$, $x = t + 2$

$c = -2:$, $x = t + 3$



→ решења се не секу (Пикар)

→ кроз сваку тачку имамо реш.

Сва реш. имају косу асимпт. $x = t$.

```
In[1]:= (*Rešenje obične DJ*)
        solution1 = DSolve[x'[t] == x[t] + 2*t - 3, x[t], t]
```

Out[1]= $\{\{x[t] \to 1 - 2t + e^{t} c_1\}\}$

```
In[2]:=
        (*Košijevo rešenje*)
        solution2 = DSolve[{x'[t] == x[t] + 2*t - 3, x[0] == 2}, x[t], t]
```

Out[2]= $\{\{x[t] \to 1 + e^{t} - 2t\}\}$

```
In[3]:=
        (*Još jedna DJ*)
        solution3 = DSolve[t*x'[t] - 2*t*Sqrt[x[t]] == 4*x[t], x[t], t]
```

Out[3]= $\{\{x[t] \to t^2 - 2t^3 c_1 + t^4 c_1^2\}\}$

```
In[4]:=
        (*Uprošćavanje*)
        solution4 = FullSimplify[solution3]
```

Out[4]= $\{\{x[t] \to t^2 (-1 + t c_1)^2\}\}$

```
In[5]:=
        (*Sistem DJ*)
        solution5  = FullSimplify[DSolve[{x'[t] == y[t] - z[t], y'[t] == x[t]^2 + y[t], z'[t] == x[t]^2 + z[t]}, {x[t], y[t], z[t]}, t]]
```

Out[5]= $\{\{x[t] \to e^{t-c_3} + c_1,\ y[t] \to e^{2t-2c_3} - c_1^2 + e^{t-c_3}(c_1 + c_2 + 2 c_1 \mathrm{Log}[e^{t-c_3}]),\ z[t] \to e^{2t-2c_3} - c_1^2 + e^{t-c_3}(-1 + c_1 + c_2 + 2 c_1 \mathrm{Log}[e^{t-c_3}])\}\}$

```
In[6]:= |
        (*Bez FullSimplify*)
        solution6 = DSolve[{x'[t] == y[t] - z[t], y'[t] == x[t]^2 + y[t], z'[t] == x[t]^2 + z[t]}, {x[t], y[t], z[t]}, t]
```

Out[6]= $\{\{x[t] \to e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1),\ y[t] \to (-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1))\, c_2 + (-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1))\left(e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1) - \frac{c_1^2}{-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1)} + 2 c_1 \mathrm{Log}[-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1)]\right),$

$z[t] \to c_1 - e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1) + (-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1))\, c_2 + (-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1))\left(e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1) - \frac{c_1^2}{-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1)} + 2 c_1 \mathrm{Log}[-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1)]\right)\}\}$

Скицирање фазних портрета у 2д

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$$

$X' = A \cdot X$ → хомогена линеарна дј. (систем реда 2)

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \underset{\downarrow}{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$ → динамички систем

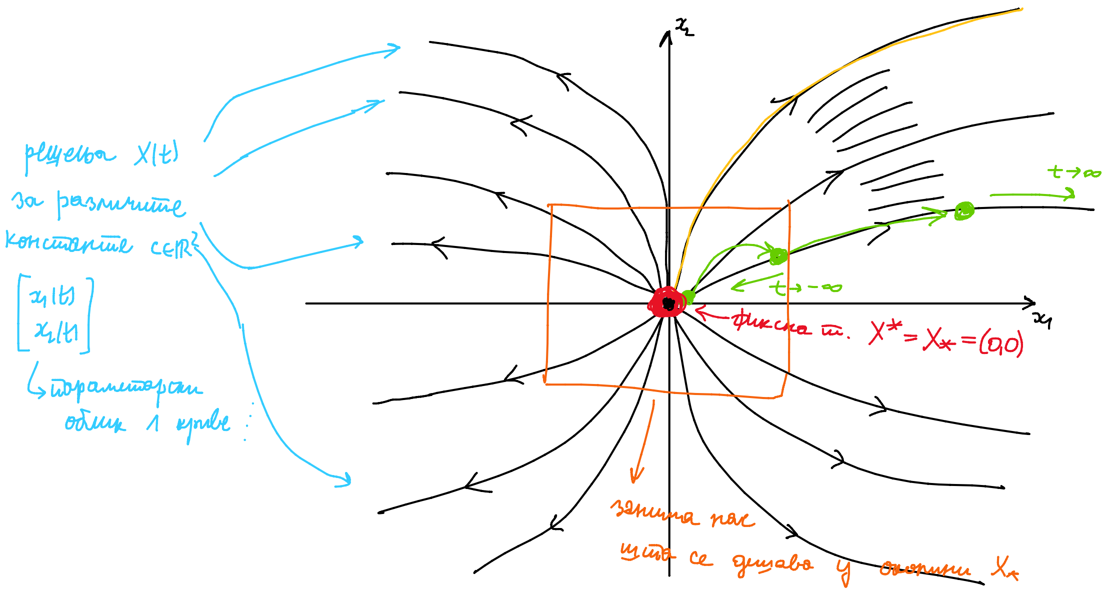
може $A(t)$

$A \in M_2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ са константним коеф. (ЛСДЈКК)

решења $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ (зависи од $c \in \mathbb{R}^2$)

фазни портрет

↙ фазна трајекторија



Еквилибријуми : $X' = 0$ $(X^* = X_*)$

(т. равнотеже, фикс. т.)

ЛСДЈКК: $A \cdot X = 0 \Rightarrow$ решење је век. потпростор од $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ 1) тачка $(0,0)$

2) права (права кроз $(0,0)$)

3) раван ($\mathbb{R}^2$)

$X' = AX$, $A = PDP^{-1}$, $A \sim D$, $P \in GL_2(\mathbb{R})$

$\cdot P^{-1} \backslash \; X' = PDP^{-1}X$

$\underline{P^{-1}X'} = D\underline{P^{-1}X}$

смена : $P^{-1}X = Y$

$Y' = P^{-1}X$

$\Rightarrow Y' = D \cdot Y$

линеарна трансф. $\rightarrow A$

Шта је D? 1) дијагонална $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

2) Жорданов блок $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

3) компл. сопс. вр. $\alpha \pm i\beta$, $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$

1. Скицирати фазни портрет динамичког система $X' = AX$, ако је:

(1) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$; (2) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (3) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$.

(1.1) $X_* = ?$ $\quad AX = 0$, $\quad \left.\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -3x_2 = 0 \end{array}\right\} \; x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow X_* = (0,0)$

сопс. вр. $\quad \det(A - \lambda E) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (-1-\lambda)(-3-\lambda) - 0 = (\lambda+1)(\lambda+3)$

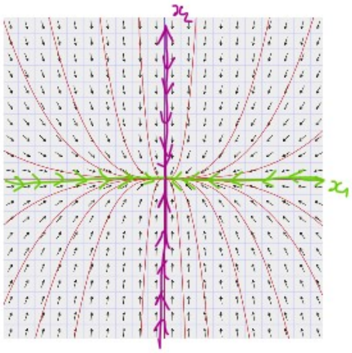
$\lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = -3 \qquad (\lambda_1, \lambda_2 < 0)$

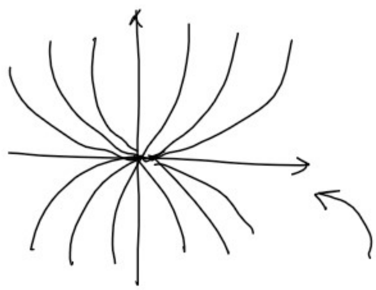
$A \sim D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow$ стабилан чвор

$y' = \begin{bmatrix} \underset{x_1}{-1} & 0 \\ 0 & \underset{x_2}{-3} \end{bmatrix} \cdot y$

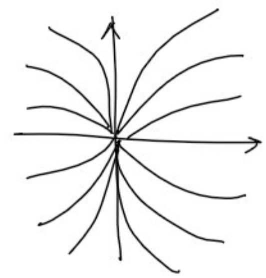
$-1 < 0 \rightarrow$ ка еквилибријуму

$-3 < 0 \rightarrow$ ка еквилибријуму





V



$|\lambda_1| < |\lambda_2| \rightarrow$ брже уз x_1-осу

$(A - \lambda_1 E) v_1 = 0$

$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} v_1 = 0$

$v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

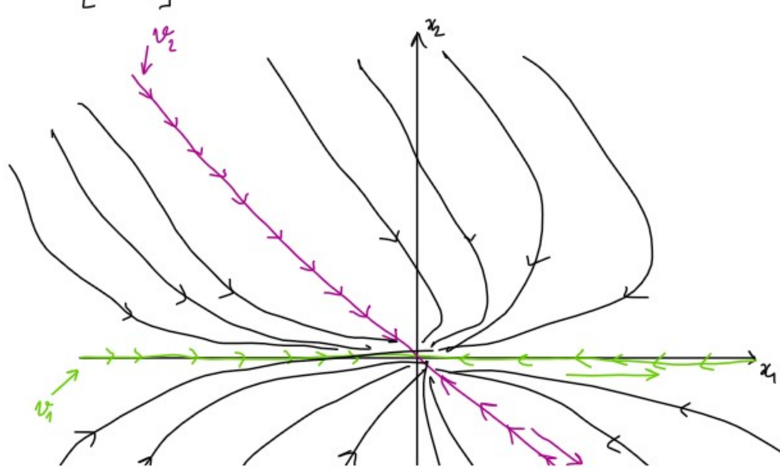
$(A - \lambda_2 E) v_2 = 0$

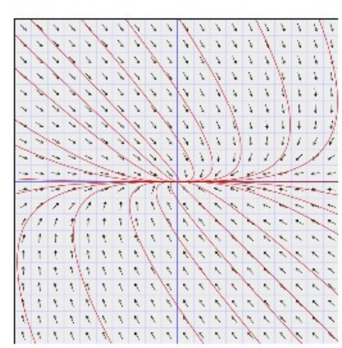
$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_2 = 0$

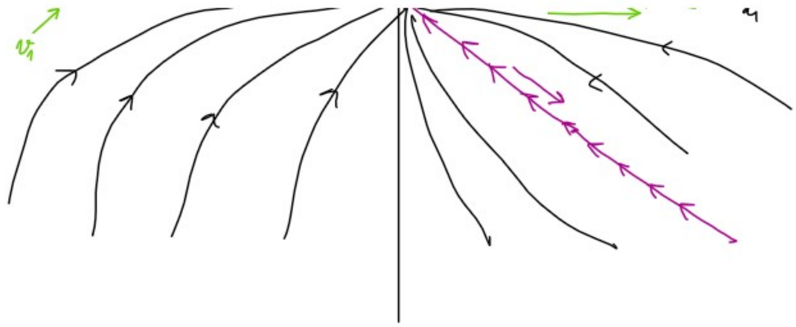
$v_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad , 2\alpha + 2\beta = 0$

$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$P = \left[v_1\!\downarrow \; v_2\!\downarrow \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$







да ли се мења оријентација? $\det P = -1 < 0 \rightarrow$ има рефлексије

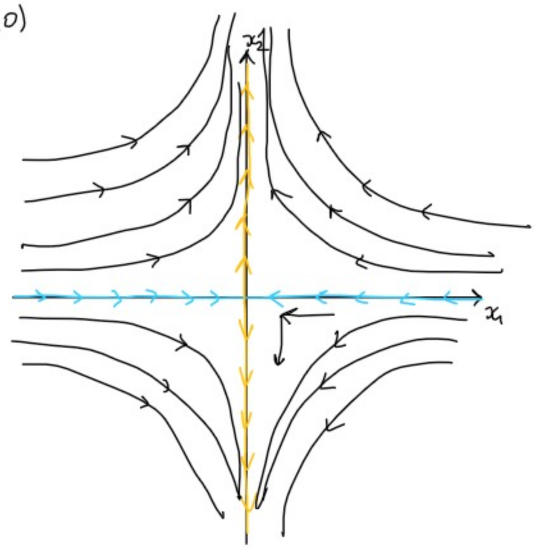
(1.2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad \left. \begin{array}{l} -x_1 + 3x_2 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 = 0 \end{array} \right\} X^* = (0,0)$

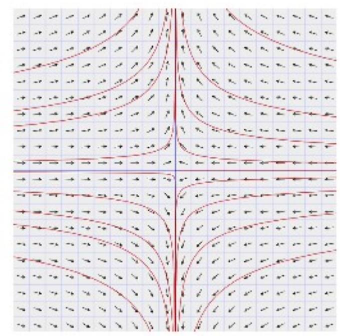
$\lambda_1 = -6,\ \lambda_2 = 2 \rightarrow$ седло

$A \sim D = \begin{bmatrix} -6 & \\ & 2 \end{bmatrix}$ $\quad -6 < 0$, $2 > 0$

$|\lambda_2| < |\lambda_1|$

↳ уз x_2-осу





сопс. век: $(A - \lambda_j E) v_j = 0$

$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $,\ P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix},\ \det P = 8 > 0$