нехомогена: $f \neq 0$

у посебним случајевима: $f(t) = e^{\alpha t} \cdot \left(P_n(t) \cdot \cos\beta t + Q_m(t) \cdot \sin\beta t \right)$

P_n - пол. ст. n

Q_m - пол. ст. m

γ - вишеструкост броја $\alpha \pm i\beta$ као решења карактеристичне јне од хомогене дј.

$$x_p(t) = t^{\gamma} \cdot e^{\alpha t} \cdot \left(R_k(t) \cos\beta t + T_k(t) \sin\beta t \right)$$

R_k, T_k - пол. ст. k

$k = \max\{n, m\}$.

1) а) $x''' - x'' + x' - x = t^2 + t$

ОР: $x(t) = \underbrace{x_H(t)}_{} + x_p(t)$

$C_1 e^{t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t, \quad c_i \in \mathbb{R}$

$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$

$1, \pm i \rightsquigarrow e^{t}, \cos t, \sin t$

$f(t) = t^2 + t$

$\alpha = 0$

$\beta = 0 \quad (\sin\beta t = 0, \cos\beta t = 1)$ $\nearrow m = 0$ (небитно)

$n = 2$

$k = 2$

$\gamma = \#(0 + i0 = 0) = 0$

$R_2(t), \cancel{T_2(t)}$

$x_p(t) = at^2 + bt + c$

$x_p' = 2at + b$

$x_p'' = 2a$

$x_p''' = 0$

$x_p''' - x_p'' + x_p' - x_p = t^2 + t$

$0 - 2a + 2at + b - at^2 - bt - c = t^2 + t$

$$\left.\begin{aligned} -2a + b - c &= 0 \\ 2a - b &= 1 \\ -a &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$a = -1$

$b = -3$

$c = -1$

$x_p(t) = -t^2 - 3t - 1$

б) $x''' - x'' + x' - x = \cos t + 2e^{t}$ → није у одг. облику

$1, \pm i$

$L(x) = f_1(t) + f_2(t)$ ↗ лин

$f_1(t) = \cos t$

$f_2(t) = 2e^t$

x_{p_1} x_{p_2}

$L(x_{p_1}) = f_1(t)$

$L(x_{p_2}) = f_2(t)$

$L(x_{p_1} + x_{p_2}) \underset{\substack{\uparrow \\ L \text{ лин.}}}{=} L(x_{p_1}) + L(x_{p_2}) = (f_1 + f_2)(t)$

f_1: $\alpha = 0, \beta = 1$

$\left.\begin{array}{l} P_n \equiv 1 \Rightarrow n = 0 \\ Q_m \equiv 0 \Rightarrow m = -\infty \end{array}\right\} k = 0 \Rightarrow R_0 \equiv c_1, \ T_0 \equiv c_2$

$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 1 = i \Rightarrow \underline{\underline{s = 1}}$

$x_{p_1}(t) = t \cdot (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ ... $c_1 = c_2 = -\frac{1}{4}$

f_2: $\alpha = 1$

$\beta = 0$

$\left.\begin{array}{l} P_n \equiv 2 \\ Q_m \text{ - ништавог} \end{array}\right\} k = 0 \Rightarrow \underline{R_k \equiv c}$

$\alpha + i\beta = 1 + 0 \cdot i = \underline{\underline{1}} \Rightarrow \underline{s = 1}$

$x_p(t) = t \cdot e^t \cdot (c) = cte^t$ ... $c = 1$

ОР: $x(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t - \frac{1}{4} t(\cos t + \sin t) + te^t.$

в) $x'' - x = \sin^2 t$

$f(t) = \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}$

$-\frac{1}{2}$

$\cos 2t$ $\sin 2t$

г) $x'' - 4x' + 5x = (\sin t + 2\cos t) \cdot e^{2t}$

$2 \pm i$

$\left.\begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{array}\right\} 2 + i \Rightarrow s = 1 \Big\} \ x_p(t) = t \cdot e^{2t} \cdot (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ ...

$m = n = k = 0$

д) $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t}$ → није у одг. облику

$1, 1 \rightsquigarrow e^t, t \cdot e^t$

$x_p(t) = e^t \cdot g(t)$

$$x_p(t) = e^t \cdot g(t)$$

$$x_p'(t) = e^t \cdot (g(t) + g'(t))$$

$$x_p''(t) = e^t \cdot (g'(t) + g''(t) + g(t) + g'(t)) = e^t \cdot (g''(t) + 2g'(t) + g(t))$$

x_p

$$e^t(g'' + 2g' + g) - 2e^t(g + g') + g e^t = \frac{e^t}{t} \quad / : e^t$$

$$g'' + 2g' + g - 2g - 2g' + g = \frac{1}{t}$$

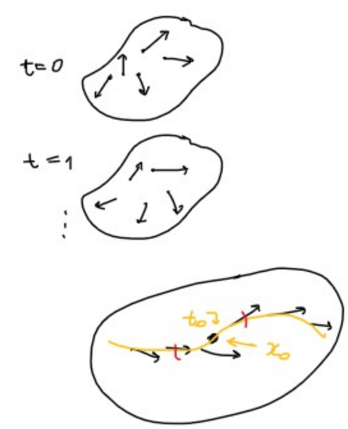
$$g'' = \frac{1}{t} \Rightarrow g' = \ln|t| + c_1 \Rightarrow g = t \cdot \ln|t| - t + c_1 t + c_2 \longrightarrow g(t) = t \ln|t|$$

$$c_1 = 1$$
$$c_2 = 0$$

$$x_p(t) = e^t \cdot t \cdot \ln|t|$$

ОР: $x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + e^t \cdot t \cdot \ln|t| \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Теореме



Теорема 121. (Пеанова[15] теорема) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^k$ непрекидно. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ постоји $\delta > 0$ и (не нужно јединствено) решење Кошијевог проблема*

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{71}$$

дефинисано на интервалу $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Пеано → егзистенција

Нека је $I \subseteq \mathbb{R}$ отворен интервал. Кажемо да је векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ локално униформно (по $t \in I$) Липшицово[1] по $\mathbf{x}$ ако свака тачка из $\mathcal{U}$ има околину $\mathcal{B}$ тако да важи $\|F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, t)\| \le L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, за неко $L > 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}$, $t \in I$.

Теорема 67. (Пикарова[2] теорема.) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ непрекидно и локално униформно (по t) Липшицово по $\mathbf{x}$. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ и $t_0 \in I$ постоји $\delta > 0$ и јединствено решење*

$$\mathbf{x} : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathcal{U}$$

Кошијевог проблема

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Пикар ⇒ егзистенција и јединственост

$$\mathbf{x}_0(t) \equiv \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_{n+1}(t) := \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} F(\mathbf{x}_n(s), s)\, ds,$$

(2) Испитати егзистенцију и јединственост решења Кошијевог проблема $x' = F(x, t)$, $x(0) = 0$:

а) $F(x,t)=tx^3$ б) $F(x,t)=t^2\cdot|x|^{1/2}$ в) $F(x,t)=\dfrac{\ln x}{1-\operatorname{sgn} x}$

а) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\times\underbrace{\mathbb{R}}_{t}$

t, x^3 – полиноми (непр) $\Big\}\Rightarrow$ F непр. на $\mathbb{R}^2$ $\xRightarrow{\text{Пеано}}$ $\exists$ решење

$$\|F(x,t)-F(y,t)\|\le L\cdot\|x-y\|$$

$k=1$: $\|\cdot\|=|\cdot|$

$$|tx^3-ty^3|\le L\cdot|x-y|$$

$$|t|\cdot|x^3-y^3|\le L\cdot|x-y|$$

$$|t|\cdot|x^2+xy+y^2|\le L \;?$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

локално око $(0,0)$ (x, t):

$t\in[-a,a]$

$x,y\in B(0)=[-b,b]$

(или нпр. $[-1,1]$)

треба наћи L тд. на $[-b,b]\times[-a,a]$ важи

$$\underline{\underline{L=3ab^2}}$$

$|t|\le a$

$|x|,|y|\le b \Rightarrow |x|^2,|xy|,|y|^2\le b^2 \Rightarrow |x^2+xy+y^2|\le|x|^2+|xy|+|y|^2\le 3\cdot b^2\Big\} \Rightarrow \le 3\cdot ab^2$ ✓

$\Rightarrow$ испуњ. лок. Лип. $\xRightarrow{\text{Пикар}}$ $\exists + !$

(*) $|tx^3-ty^3|=|t|\cdot|x^3-y^3|$

$f(x)=x^3$

$|f(x)-f(y)|$

f је C^1 фја : увек лок. Лип.!

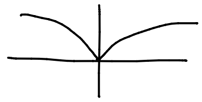
$$L=\max|f'|$$

$k\ge 2$: $L=\max\limits_{i,j}\left|\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|$ – Т ср. вр.

б) $F(x,t)=t^2\cdot|x|^{1/2}$

t^2

$\sqrt{|x|}$



$\Big\}$ F непр. $\overset{\text{Пеано}}{\Rightarrow}$ $\exists$ решење

$$|F(x,t)-F(y,t)| \le L\cdot|x-y|$$

$$\underbrace{t^2}_{\le 1}\cdot\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \le L\cdot|x-y|$$

$\to$ локално око 0

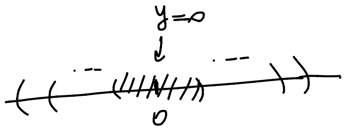
$\underline{t\in[-1,1]}$ (може да се занемари)

$$\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \le |x-y|\cdot L \quad \text{у околини } 0$$

$x(0)=0$

Доказујемо да ово не важи <u>у свакој околини 0</u>.

$y=0$



$\underline{x\to0}$ $(x\neq0)$

ппс $\exists L\ \forall U$ окол. 0 : $\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \le L\cdot|x-y|$

$y=0$ $\quad \sqrt{|x|} \le L\cdot|x| \ /:|x|$

$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \le L \ /\lim_{x\to0}$

$\infty \le L$ ↯

$\Rightarrow$ F није лок. Лип. у околини 0

$\Rightarrow$ не важи Пикар

$\boxed{\text{НЕ ЗНАЧИ}}$ да решење није јединствено!

решавамо: $x' = t^2\sqrt{|x|}$, $x(0)=0$

$x\equiv0$ ✓

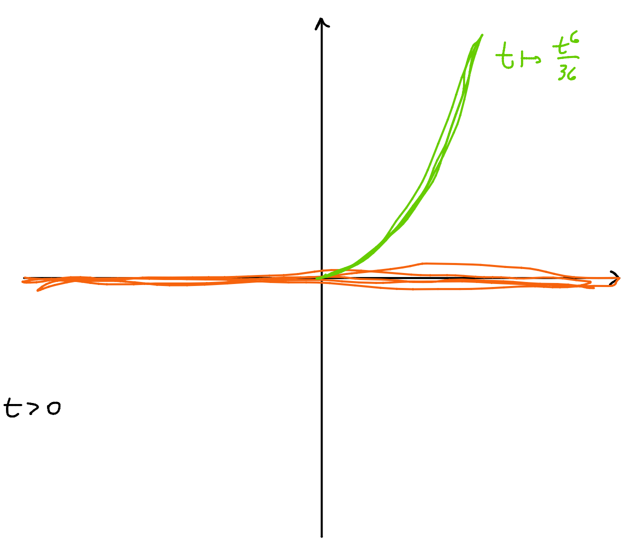
$x\neq0$: $\frac{x'}{\sqrt{|x|}} = t^2$ (РП)

1) $x>0$ $\quad \frac{x'}{\sqrt{x}} = t^2 \ /\int$

$2\sqrt{x} = \frac{t^3}{3}+c$

$t\to0 \Rightarrow x\to0$ (непр. од x)

$\Rightarrow c=0 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{x}=\frac{t^3}{6}}_{t>0} \Rightarrow x=\frac{t^6}{36}$, $t>0$

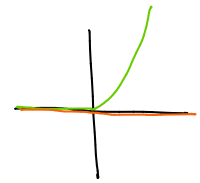


овде већ имамо 2 решења кроз $(0,0)$:

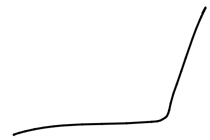
(*) $x \equiv 0$ ✓

(#) $x(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \frac{t^6}{36}, & t>0 \end{cases}$ → C^∞ фје

$x^{(n)}(0) = 0$ → јесте глатко



E ✓ Ј ✗

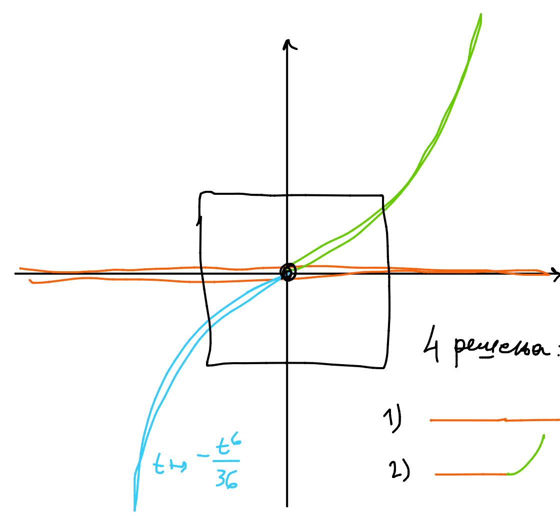


2) $x<0$

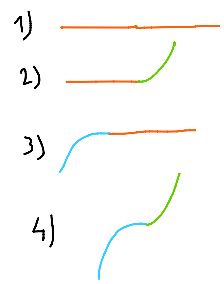
$\frac{x'}{\sqrt{-x}} = t^2 \;/\int$

⋮

$x = -\frac{t^6}{36}, \; t<0$

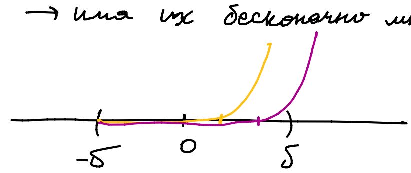


4 решења:



→ C^∞

не значи да на произвољном (датом) интервалу $(-\delta, \delta)$ постоје само 4 решења КП. → има их бесконачно много



(видети предавања)

в) $F(x,t) = \frac{\ln x}{1 - \operatorname{sgn} x}$

F није непр. ¬Пик, ¬Пеа

$\ln x$, $x>0$

$1 - \operatorname{sgn} x \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sgn} x \neq 1 \Rightarrow x \le 0$ ↯

ова једначина у поставци је противуречна ⇒ нема реш.