Организација: ПИ-50п – 2ч – 3 зад – 1 зад. проф. } учите заједно
УИ-50п

ДЈ – $f(t,x,x',\dots,x^{(n)})=0$, $x(t)=?$

пр. $(x''' + 2x'')^2 - x = t$ ← 3. реда

ред = ред највећег извода у њој

ДЈ у ужем смислу – $x^{(n)} = f(t,x,x',\dots,x^{(n-1)}) \rightsquigarrow X' = f(t,X)$

↳ $X\in\mathbb{R}^n$ (систем 1. реда)

$$x'(t) = x' = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

① Решити ДЈ $\quad x' = 3t^2 + t \;/\int$

↳ наћи сва решења (∞ много)

$$x(t) = t^3 + \frac{t^2}{2} + C, \quad c\in\mathbb{R}$$

② Наћи све диф. фје. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(x) \;/', \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$f(x) = f'(x) \rightsquigarrow f(x) = c\cdot e^x$ (видљиво)

$$f'(x) = f(x)$$

$$f'(x) - f(x) = 0 \;/\cdot e^{-x}$$

$$e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 0$$

$$(f(x)\cdot e^{-x})' = 0 \Rightarrow f(x)\cdot e^{-x} = c \Rightarrow \underline{f(x) = c\cdot e^x}$$

провера:

$$\int_0^x c e^t\,dt = c e^x$$

$$c e^t\big|_0^x = c e^x$$

$$c e^x - c = c e^x \to c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f\equiv 0}$$

Опште решење (ОР) – облик који описује сва решења ДЈ, $f(x) = c\cdot e^x$

Партикуларно решење (ПР) – једно конкретно решење (с фикс.), $f(x) = e^x$, $f(x)\equiv 0$

③ $x' = kx$, $k\in\mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\frac{x'}{x} = k$

$k=0$ – $x\equiv c$

$k<0$ – радиоактивни распад

$k>0$ – експоненцијални раст

Раздвајање променљивих

$x'(t) = \frac{f(t)}{g(x)}$, $f\in C(a,b)$, $g\in C(c,d)$, $g\neq 0$

$k>0$ – експоненцијалног раста

$$\frac{x'}{x}=k$$

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{x}=k$$

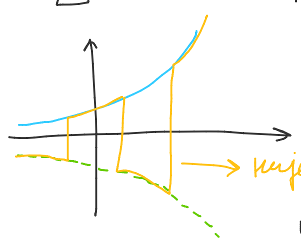
ФП

$$\frac{dx}{x}=k\,dt \;\Big/\int \qquad , x\neq 0$$

$$\ln|x|=kt+c \quad , c\in\mathbb{R}$$

$$(\ln|x|)' \underset{x\neq 0}{=} \frac{1}{|x|}\cdot(|x|)' = \frac{sgn(x)}{|x|}=\frac{1}{x}$$

$$|x|=e^{kt+c}=e^{c}\cdot e^{kt}=c_1\cdot e^{kt} \quad , c_1>0$$



→ није x, јер је x непр.

или $x=c_1\cdot e^{kt}$ ∨ $x=-c_1\cdot e^{kt}$

$$x=c_2\cdot e^{kt} \quad , c_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$x\equiv 0 \ ✓ \quad +(c_2=0)$$

ОР: $\boxed{x=c_3\cdot e^{kt} \ , c_2\in\mathbb{R}}$

$$x'(t)=\frac{f(t)}{g(x)} \quad , \quad f\in C(a,b), \quad g\in C(c,d), \ g\neq 0$$

ОР: $\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(u)\,du=\int_{t_0}^{t} f(v)\,dv$

$$\left(\int g(x)\,dx=\int f(t)\,dt\right)$$

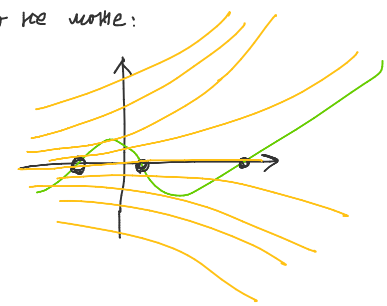
интуитивно:

$$x'=\frac{dx}{dt}=\frac{f(t)}{g(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\int g(x)\,dx=\int f(t)\,dt \;\Big/\int$$

зашто не може:



Пикарова Т!
(касније)
За довољно лепе ДЈ решења се не секу!

Кошијев проблем: $\begin{cases} x'=f(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$ ← Кошијев услов (почетни)

n-тог реда:

$$x(t_0)=x_0$$
$$x'(t_0)=x_1$$
$$x''(t_0)=x_2$$
$$\vdots$$
$$x^{(n-1)}(t_0)=x_{n-1}$$

(4) $tx'=x$, наћи ОР и ПР тд. $x(-3)=\frac{1}{3}$.

$$\frac{x'}{x}=\frac{1}{t} \;\Big/\int \quad \leftarrow \ x\neq 0, \ t\neq 0$$

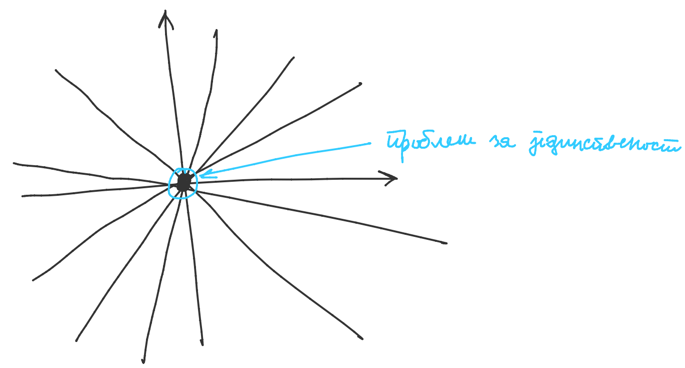
$$\ln|x|=\ln|t|+c \ , c\in\mathbb{R} \quad , c=\ln c_2 \ , c_2>0$$

$|x| = |t| \cdot c_2$

$x = c_3 \cdot t, \quad c_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x \equiv 0 \ \vee \quad x = c_4 \cdot t, \ c_4 \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{3} = c_4 \cdot (-3) \Rightarrow c_4 = -\frac{1}{9}, \quad$ ПР: $x = -\frac{1}{9}t$



$t=0: \quad 0 \cdot x'(0) = x(0) \Rightarrow \underline{\underline{x(0)=0}}$

5) $x' = \frac{2xt}{t^2-1}$. Решити ДЈ, скицирати решења и наћи ПР:

а) $x(0)=1$

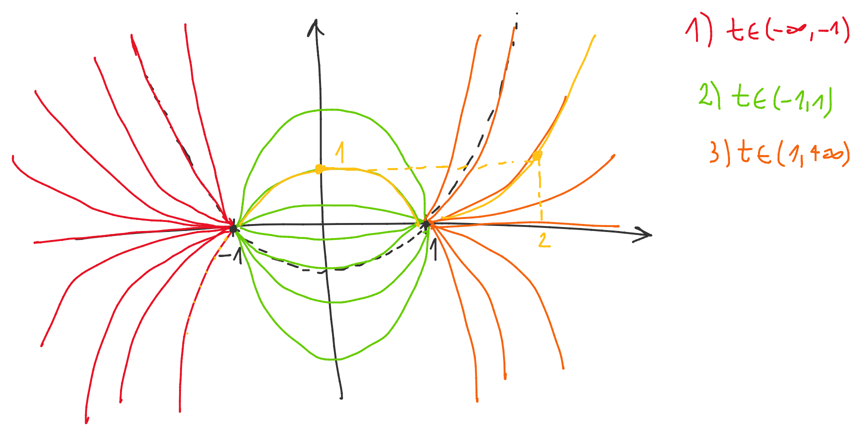
б) $x(2)=1$

↳ интегралне криве

није деф. за $t = \pm 1$

$(-\infty,-1), \ (-1,1), \ (1,+\infty)$

$\frac{x'}{x} = \frac{2t}{t^2-1} \ / \int \quad \leftarrow x \neq 0, \ |t| \neq 1$



$\ln|x| = \ln|t^2-1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$|x| = |t^2-1| \cdot c_1, \quad c_1 > 0$

$x = c_2(t^2-1), \quad c_2 \neq 0$

$x \equiv 0 \ \vee$

$\underline{\underline{x = c_3(t^2-1)}}, \quad c_3 \in \mathbb{R}$

а) $x(0)=1$

$1 = c_3(0^2-1) = -c_3 \Rightarrow c_3 = -1$

$x = -t^2+1, \ t\in(-1,1)$

б) $1 = c_3(2^2-1) \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}$

$x = \frac{t^2-1}{3}, \ t>1$

домаћи: $x' = kx^2, \ k>0$ (једначина експлозије) $\Big\}$ ОР, показати да реш није деф. на $\mathbb{R}$ и да се не може продужити

6) Наћи све C^1 функције $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ тд. $f(0)=1$ и површина испод графика од f од 0 до x_0 је једнака дужини лука од f од 0 до x_0, $\forall x_0>0$.

$$\int_0^{x_0} f(x)\,dx = \int_0^{x_0} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \;\Big/'_{x_0}, \quad \forall x_0$$

$$f(x_0) = \sqrt{1+(f'(x_0))^2} \;\Big/^2$$

$$f^2 = 1+f'^2$$

$$f'^2 = \underbrace{f^2-1}_{\geq 0} \qquad (f \geq 1)$$

$$f' = \pm\sqrt{f^2-1}$$

? $+$ (f не опада јер $f(0)=1$, $f \geq 1$)

$$f' = \sqrt{f^2-1}$$

$$\frac{f'}{\sqrt{f^2-1}} = 1 \;\Big/\int \quad \to f \neq 1$$

⋮ (домаћи)

$f \equiv 1$ ✓
$(f(0)=1)$

Типови ДЈ:

$\boxed{0}$ Раздвајање променљивих

$\boxed{1}$ $x' = f(\underline{\alpha t+\beta x+\gamma})$, $f \in C(a,b)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$

Смена: $x(t) \rightsquigarrow y(t)$

$$y(t) = \alpha t + \beta x(t) + \gamma \;\Big/\frac{d}{dt}$$

$$y' = \alpha + \beta x' \Rightarrow x' = \frac{y'-\alpha}{\beta}$$

$\rightsquigarrow$ РП

(7) а) $x' = x+2t-3$

б) $x' = (x+t)^2$

б) $f(z) = z^2$

$y = x+t$

$y' = x'+1 \Rightarrow x' = y'-1 \Rightarrow y'-1 = y^2$

$y = x + t$

$y' = x' + 1 \Rightarrow x' = y' - 1 \Rightarrow y' - 1 = y^2$

$$y' = y^2 + 1$$

$$\frac{y'}{y^2+1} = 1 \quad / \int$$

$$\operatorname{arctg} y = t + c, \ c \in \mathbb{R}$$

$\operatorname{arctg} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$y = \operatorname{tg}(t+c)$$

$$x + t = \operatorname{tg}(t+c)$$

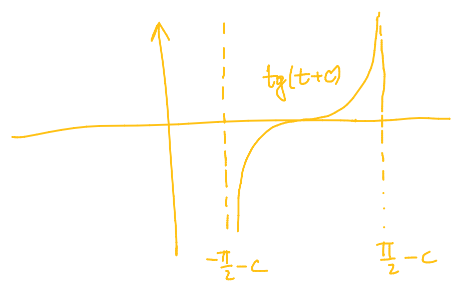
$$x = \operatorname{tg}(t+c) - t, \ c \in \mathbb{R}$$

НАП: дефинисаност решења?

$$t + c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underline{-\frac{\pi}{2} - c < t < \frac{\pi}{2} - c}$$

∞ решења, свако деф. на разл. интервалу



+решења се НЕ могу продужити