(*) $\lambda \in \mathbb{C}$ сопс. вр. $A \Rightarrow e^{\lambda}$ сопс. вр. e^{A}

$$\det(A-\lambda E)=0 \overset{?}{\Rightarrow} \det(e^{A}-e^{\lambda}E)=0$$

$$A^k-(\lambda E)^k = (A-\lambda E)\cdot\ldots$$

$$\det(e^{A}-e^{\lambda}E) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k-(\lambda E)^k}{k!}\right) = \lim_{N\to\infty}\det\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{(A-\lambda E)(A^{k-1}+\lambda A^{k-2}+\ldots+\lambda^{k-2}A+\lambda^{k-1}E)}{k!}\right)$$

$$e^{A} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}, \quad e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}$$

$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ непр.

$$= \lim_{N\to\infty}\det\Bigg((A-\lambda E)\cdot\overbrace{\sum_{k=0}^{N}\frac{A^{k-1}+\ldots+\lambda^{k-1}E}{k!}}^{M_N}\Bigg) = \lim_{N\to\infty} 0 = 0.$$

$$\det\Bigg((A-\lambda E)\cdot\sum_{k=0}^{N}\ldots\Bigg) = \underbrace{\det(A-\lambda E)}_{=0}\cdot\det(M_N)$$

3. Нека је $P(t)$ неконстантан полином. Да ли функција $x(t)=(t-1)^2P(t)$ може бити решење диференцијалне једначине $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$ дефинисано на некој отвореној околини тачке $t=1$, ако су $a(t)$ и $b(t)$ непрекидне функције?
Помоћ: Зашто овде важи Пикарова теорема? Посматрати почетни проблем $x(1)=x'(1)=0$.

$$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$$

$x_1 = x$, $x_2 = x'$

$x_1' = x_2$

$x_2' = -a x_2 - b x_1$

$X' = A(t)X$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix}$$

важи Пикар јер је $A(t)$ непр.

$\Rightarrow x(1)=x'(1)=0$

$x(t) = (t-1)^2P(t)$

$x \equiv 0$ ✓

$x(1)=x'(1)=0$

$x(1)=0$

$x'(t) = (t-1)^2\cdot P'(t) + 2(t-1)\cdot P(t)$, $x'(1)=0$

1. Методом карактеристика решити Кошијев проблем за парцијалну диференцијалну једначину првог реда:

$$(x+4y)z'_x + (-x+5y)z'_y + 2z = x, \quad x=2y, z=\sin y+\frac{x}{5}.$$

$\longrightarrow X' = AX \rightsquigarrow \ldots$ $\left.\begin{matrix} c_1(s) \\ c_2(s) \\ c_3(s)\end{matrix}\right\}$ $\left(2s,\ s,\ \sin s+\frac{2s}{5}\right)$

2. Решити парцијалну диференцијалну једначину $yu'_x - xu'_y = 0$, а потом одредити криву која је у пресеку

1. Методом карактеристика решити Кошијев проблем за парцијалну диференцијалну једначину првог реда:

$$(x+4y)z'_x + (-x+5y)z'_y + 2z = x, \quad x = 2y, z = \sin y + \frac{x}{5}.$$

$\rightsquigarrow X' = AX \rightsquigarrow \dots$ $\left.\begin{matrix} c_1(s) \\ c_2(s) \\ c_3(s) \end{matrix}\right\}$ $\left(2s, s, \sin s + \frac{2s}{5}\right)$

2. Решити парцијалну диференцијалну једначину $yu'_x - xu'_y = 0$, а потом одредити криву која је у пресеку графика решења чији су почетни услови $u_1(0,y) = |y|$ и $u_2(0,y) = 1 + \sqrt{1-y^2}$.

3. Наћи опште решење парцијалне једначине

$$yz\frac{\partial u}{\partial x} + xz\frac{\partial u}{\partial y} + yx^5z^2(z^6-1)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

4. Наћи опште решење парцијалне диференцијалне једначине:

$$(y(x+y)^3 + z))z'_x + (x(x+y)^3 - z)z'_y = z(x+y).$$

(4)

$$x' = y(x+y)^3 + z$$

$$y' = x(x+y)^3 - z$$

$$z' = z(x+y)$$

$$x' + y' = y(x+y)^3 + x(x+y)^3 = (x+y)^4$$

$$\frac{(x+y)'}{(x+y)^4} = 1 \quad / \int dt \rightsquigarrow \times$$

$$\frac{(x+y)'}{(x+y)^3} = x+y = \frac{z'}{z} \quad / \int$$

$$\frac{(x+y)^{-2}}{-2} = \ln|z| + c \quad \dots$$

$$xx' - yy' = zx + yz = z(x+y) = z' / \int$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = z + c$$

(2)

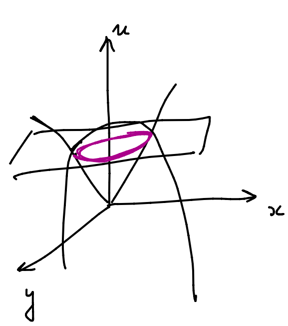
$$\left.\begin{matrix} x' = y \\ y' = -x \end{matrix}\right\} \quad x^2 + y^2 = \psi_1(x,y) \qquad \text{OP}: u = \varphi(\psi_1), \varphi \in C^1$$

$$u' = 0$$

$$u_1(0,y) = |y| = \sqrt{y^2} = \sqrt{\psi_1|_{x=0}} \quad \Rightarrow \quad u_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \to \text{KP1}$$

$$\psi_1(0,y) = y^2$$

$$u_2(x,y) = 1 + \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \to \text{KP2}$$



$u_1 = u_2$?

$\vdots$

$$\left.\begin{matrix} u = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{matrix}\right\}$$

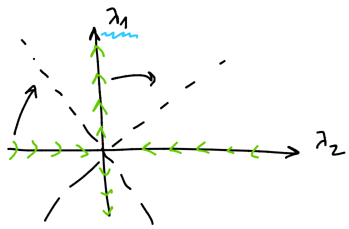
(*) $x' = z$

$$y' = z\left(2x+\sqrt{x^2y}\right)$$
$$z' = 2x+1+\sqrt{x^2-y}$$

$$\frac{y'}{x'} = 2x+\sqrt{x^2-y}$$

$$dy = \left(2x+\sqrt{x^2-y}\right)dx \rightsquigarrow \mu \ldots$$

ДЈБ:



$X' = AX$

$X' = JX$

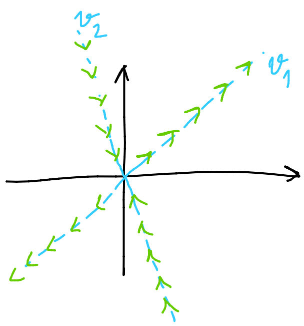
T

$\lambda_1 > 0$

$\lambda_2 < 0$

$\det T < 0$ – мењамо ориј.

$\det T > 0$ – не мењамо



2. Наћи Кошијева решења диференцијалне једначине $x'' + t^5x' = t^5\,(x')^7$ са условима
   (а) $x(2) = 3$, $x'(2) = 1$;
   (б) $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

смена: $x' = y$

$x' = y$ ...

$$y' + t^5 y = t^5 y^7$$

РП

Бернул. $\alpha = 7$

$$z = y^{1-7} = y^{-6}$$

$$y' = t^5(y^7 - y)$$

$$\frac{y'}{y^7 - y} = t^5$$

$\boxed{y=1}$!

$$\begin{bmatrix} -1-i & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -i & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1-i & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
&(-1-i)a - c = 0\\
&a - ib + c + d = 0\\
&\cancel{2a + (1-i)c = 0}\\
&a - b - id = 0
\end{aligned}\right\}$$

$/\cdot(i-1)$ $\quad -(i^2-1^2) = +2$ ✓

$(1) \Leftrightarrow (3)$

$$c = (-1-i)a$$

$$\cancel{a} - ib - \cancel{a} - ia + d = 0 \Rightarrow -ib - ia + d = 0 \,/\cdot(-i)$$

$$a - b - id = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
&-b - a - id = 0\\
&a - b - id = 0
\end{aligned}\right\} -$$

$$\boxed{a = 0} \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$b = -id$$

$$d = 1$$
$$b = -i$$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(*) $$\left.\begin{aligned}
x' &= y\\
y' &= -x
\end{aligned}\right\} \quad X' = AX \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$
$$u' = 0$$

$\vdots$

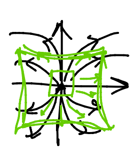
(*) $$F(x,y) = (x^2 - 2x + 2xy + 3y^3,\ 5y - 2x^2 - y^2 - 2xy)$$

$$\Pi = [0,1]^2$$

$$P(\phi^t(\Pi)) = ?$$

Лиувилова Т о запремини

$$\frac{d\,\mathrm{Vol}(\phi^t(\Pi))}{dt} = \int_{\phi^t(\Pi)} \mathrm{div}\,F \, dX$$



$$\mathrm{div}\,F = 2x - 2 + 2y + 5 - 2y - 2x$$
$$= 3$$

$$\overset{\parallel}{P(\phi^t(\Pi))}$$
$$\mathrm{Vol}(\phi^t(\Pi))$$

-3

$$\frac{d\,Vol(\phi^t(\Pi))}{dt} = \int_{\phi^t(\Pi)} 3\,dx\,dy = 3P(\phi^t(\Pi))$$

$$\frac{dP}{dt} = 3P \Rightarrow P = e^{3t}\cdot c = e^{3t}.$$

$P_0 = P(\Pi) = 1$

⊛ └ униформно по t

(не зависи од t)

→ сме од околине да зависи

4. Решити систем једначина

$$y_1' = \frac{x(y_1+y_2)}{y_1^2+y_2^2}, \quad y_2' = \frac{x(y_1-y_2)}{y_1^2+y_2^2}.$$

3.4

(4) $X'(t) = AX(t) + B(t)$

OP: $X(t) = X_H(t) + X_p(t)$

б) $X_p(t) = \begin{bmatrix} a_1t+b_1 \\ a_2t+b_2 \\ a_3t+b_3 \end{bmatrix}$

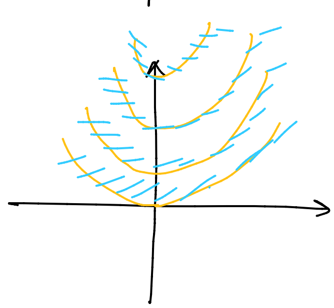
в) $X_p(t) = e^{tA}\cdot\int e^{-tA}\cdot B(t)\,dt = \dots$

са вежби!

⊛ $x' = F(t,x)$

$x^2 - y = c$

$y = x^2 - c \rightarrow$ параболе



(5) $x' = 2t$

⑤ $x' = \frac{2t}{x}$

$\frac{2t}{x} = c$

$x = \frac{2t}{c}$

$x = c_1 t \;,\; c = c_1$

$c_1 t = \frac{2t}{c_1}$

$\Rightarrow c_1 = \sqrt{2}$