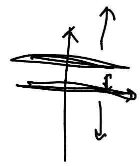
$x' = x^2 + a$

$\frac{dx}{dt}$

$x' = x(1-x)$

$x \equiv 0$

$x \equiv 1$



1) $a < 0$

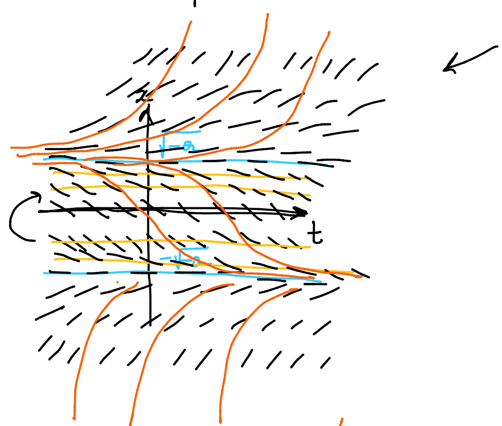
$x^2 + a = 0$

$x^2 = -a$

$x = \sqrt{-a}$

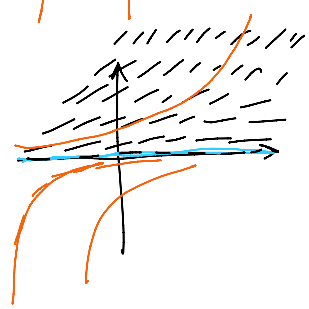
$x = -\sqrt{-a}$

$x^2 + a = c$



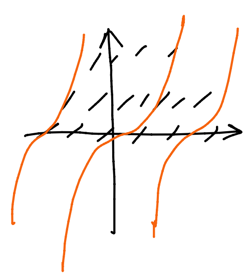
2) $a = 0$

$x' = x^2$



3) $a > 0$

$x' = x^2 + a > 0$



Решити диференцијалну једначину $2tx^3 - 2t^3x^3 - 4tx^2 + 2t + (3t^2x^2 + 4x)x' = 0.$ $/ \cdot dt$

$(2tx^3 - 2t^3x^3 - 4tx^2 + 2t)\,dt + (3t^2x^2 + 4x)\,dx = 0$

$\vdots \; \mu$

Две шоље топлог чаја познатих почетних температура $T_1(0) = T_2(0) = T_0$ су остављене да се хладе на собној температури T_∞ (таквој да важи $T_\infty < T_0$). Прва шоља се остави недирнута и промена њене температуре $T_1(t)$ у времену се може моделовати Њутновим законом хлађења

$$\frac{dT_1(t)}{dt} = -a(T_1(t) - T_\infty),$$

$$\frac{dT_1}{dt} = -a(T_1 - T_\infty) \Rightarrow \frac{dT_1}{T_1 - T_\infty} = -a\,dt \;/\int$$

$$\vdots$$

$$T_1 = ce^{-at} + T_\infty \qquad t = 0$$

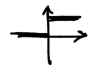
$$T_1(0) = T_0 = c + T_\infty$$

$$T_1 = (T_0 - T_\infty)e^{-at} + T_\infty$$

где је $a > 0$ дата константа која зависи од структуре шоља и геометрије поставке. У другу шољу се од тренутка $t = 1/a$ почне сипати вода константном брзином која је све топлија и топлија (линеарно са временом) и промена њене температуре $T_2(t)$ у времену (за $t \neq 1/a$) се може моделовати као

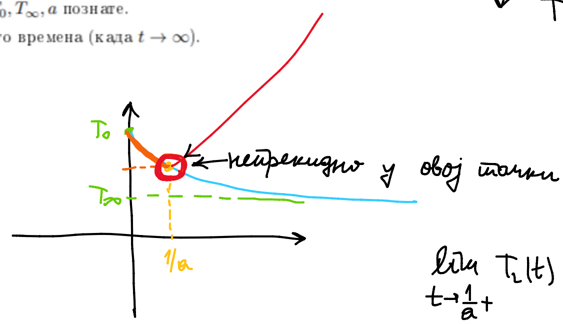
$$\frac{dT_2(t)}{dt} = -a(T_2(t) - T_\infty) + tH(t - 1/a),$$

где је са H означена Хевисајдова функција $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$



(а) Наћи температуре чаја у обе шоље, $T_1(t)$ и $T_2(t)$, за време $t \geqslant 0$, претпостављајући да је температура непрекидна функција од времена. Претпоставити да су константе T_0, T_∞, a познате.

(б) Описати шта се дешава са овим температурама после довољно много времена (када $t \to \infty$).



$$\frac{dT_2}{dt} = -a(T_2 - T_\infty) + t, \quad t > \frac{1}{a}$$

линеарна

$$\vdots$$

$$T_2(t) = \dots \quad , \; t > \frac{1}{a}$$

$$c_1$$

услов

$$\lim_{t \to \frac{1}{a}+} T_2(t) = \lim_{t \to \frac{1}{a}-} T_1(t)$$

$$T_2\left(\frac{1}{a}\right) = T_1\left(\frac{1}{a}\right)$$

Дата је диференцијална једначина $(t + 2x)x' = kx - \frac{2}{t}(x^m + tx) - t$.

(а) Наћи један пар вредности $(k, m) \in \mathbb{Z}^2$ тако да се сменом $y = x^m + tx$ једначина своди на линеарну диференцијалну једначину и решити је у том случају.

(б) Наћи све парове $(k, m) \in \mathbb{Z}^2$ за које једначина постаје једначина тоталног диференцијала и решити је у тим случајевима.

а) $y = x^m + tx$

$$y' = mx^{m-1}x' + t \cdot x' + x \Rightarrow \frac{y' - x}{mx^{m-1} + t} = x'$$

$$(t + 2x)\frac{y' - x}{mx^{m-1} + t} = kx - \frac{2}{t}y - t$$

$\boxed{m = 2}$

$$y' - x = kx - \frac{2}{t}y - t$$

$\boxed{k = 1}$

б) $\underbrace{(t + 2x)}_{M}dx - \underbrace{\left(kx - \frac{2}{t}(x^m + tx) - t\right)}_{N}dt = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \dots$$

$x'' - 8x' + 16x + e^{4t}\sqrt{t} = 0$

$\boxed{x(1) = 2x'(1)}$

$t = 1: \quad x''(1) \underbrace{-8x'(1) + 16x(1)}_{=0} + e^4 = 0$

$x''(1) = -e^4 < 0 \Rightarrow$ конкавна

$X' = AX + B$

$X(t) = X_H(t) + \boxed{X_p(t)}$

$X_p(t) = \left[\ - - -\ \right]$

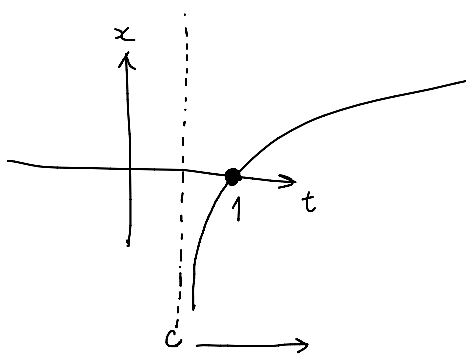
Који је интервал дефинисаности решења диференцијалне једначине $t^3x' + t^2x - x^2 = 2t^4$ за које важи $x(1) = 3/2$?

$x' + \frac{1}{t}x - \frac{x^2}{t^3} = 2t$ → Рикати

$x = at + b$

$x = at^2 + bt + c$

$\boxed{t^2}$



$\frac{1}{t-c}$

Решити диференцијалну једначину $3x^3 - e^{-3tx} + (2x + 3tx^2)x' = 0$, а затим наћи партикуларно решење које је тангентно на праву $x = 1$.

$\underbrace{(3x^3 - e^{-3tx})}_{M}dt + \underbrace{(2x + 3tx^2)}_{N}dx = 0$

$\mu(w(x,t))$

M N $\int \mu(w(x,t))$

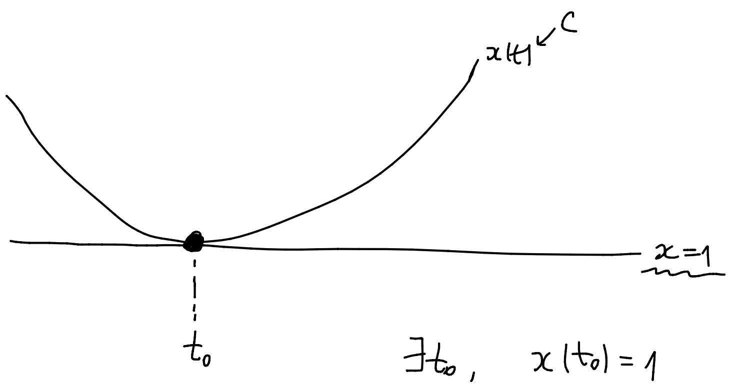
$$\frac{d\mu}{\mu} = \boxed{\frac{N'_t - M'_x}{w'_x M - w'_t N}}\, dw = \frac{\overbrace{3x^2 - 9x^2}^{-6x^2} - 3te^{-3tx}}{\underset{\uparrow\, t}{w'_x}\left(3x^3 - e^{-3tx}\right) - \left(2x + 3tx^2\right)\underset{\uparrow\, x}{w'_t}}\, dw =$$

$$= \frac{-6x^2 - 3te^{-3tx}}{-te^{-3tx} - 2x^2}\, dw = 3\, dw \quad \therefore$$

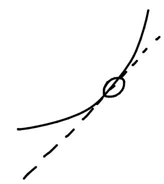
$w = xt$

$w = f(x) + g(t)$

$w = f(x)\cdot g(t)$



$F(x,t) = c$



$\exists t_0,\quad x(t_0) = 1$

$x'(t_0) = 0$

пр: $\underbrace{x^2 + t^2 = c}\ \Big/ \frac{d}{dt}$

$2x\frac{dx}{dt} + 2t = 0 \ \Big/ t_0$

$2x(t_0)\cdot x'(t_0) + 2t_0 = 0$

$\vdots$