Задаци за вежбање из ДЈ за Р смер 2021/2022

асистент: Душан Дробњак

(I) Једначине које се директно решавају

ДЈ која раздваја променљиве и једначине које се своде на њу, линеарна ДЈ и једначине које се своде на њу, смене, ДЈ са тоталним диференцијалом и интеграциони фактор, скицирање решења

1. За $\alpha > 0$ дата је диференцијална једначина
$$\frac{xx'}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{8t^2+x^2+1}{2t^2+x^2+1}. \tag{$\star$}$$
   (а) Трансформисати једначину ($\star$) сменом $v(t) = \sqrt{x(t)^2+\alpha}$.
   (б) Решити једначину ($\star$) за једно $\alpha > 0$ по избору.

2. Наћи Кошијева решења диференцијалне једначине $x'' + t^5 x' = t^5 \left(x'\right)^7$ са условима
   (а) $x(2) = 3$, $x'(2) = 1$;
   (б) $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

3. Две шоље топлог чаја познатих почетних температура $T_1(0) = T_2(0) = T_0$ су остављене да се хладе на собној температури T_∞ (таквој да важи $T_\infty < T_0$). Прва шоља се остави недирнута и промена њене температуре $T_1(t)$ у времену се може моделовати Њутновим законом хлађења
$$\frac{dT_1(t)}{dt} = -a(T_1(t) - T_\infty),$$
где је $a > 0$ дата константа која зависи од структуре шоља и геометрије поставке. У другу шољу се од тренутка $t = 1/a$ почне сипати вода константном брзином која је све топлија и топлија (линеарно са временом) и промена њене температуре $T_2(t)$ у времену (за $t \neq 1/a$) се може моделовати као
$$\frac{dT_2(t)}{dt} = -a(T_2(t) - T_\infty) + tH(t - 1/a),$$
где је са H означена Хевисајдова функција $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$
   (а) Наћи температуре чаја у обе шоље, $T_1(t)$ и $T_2(t)$, за време $t \geqslant 0$, претпостављајући да је температура непрекидна функција од времена. Претпоставити да су константе T_0, T_∞, a познате.
   (б) Описати шта се дешава са овим температурама после довољно много времена (када $t \to \infty$).

4. Дата је диференцијална једначина $(t + 2x)x' = kx - \frac{2}{t}(x^m + tx) - t$.
   (а) Наћи један пар вредности $(k, m) \in \mathbb{Z}^2$ тако да се сменом $y = x^m + tx$ једначина своди на линеарну диференцијалну једначину и решити је у том случају.
   (б) Наћи све парове $(k, m) \in \mathbb{Z}^2$ за које једначина постаје једначина тоталног диференцијала и решити је у тим случајевима.

5. Скицирати поље праваца и интегралне криве диференцијалне једначине $x' = \frac{2t}{x}$, не решавајући је. Посебно издвојити (означити) на скици по један пример за следећа решења (у смислу реалних функција):
   (а) Решење које је дефинисано за свако $t \in \mathbb{R}$;
   (б) Решење које је део праве.

   За које захтеве од (а) и (б) постоји јединствено решење, а за које више њих?

6. Решити диференцијалну једначину $3x^3 - e^{-3tx} + (2x + 3tx^2)x' = 0$, а затим наћи партикуларно решење које је тангентно на праву $x = 1$.

7. Наћи решење диференцијалне једначине $tx' = \sin t - 2x$ које пролази кроз тачку $(\pi/2, 0)$. Који је интервал дефинисаности тог решења?

8. Решити диференцијалну једначину $\left(x\operatorname{tg}t+\frac{e^{tx}}{\cos^2 t}\right)\mathrm{d}t+t\operatorname{tg}t\,\mathrm{d}x=0$.

9. Који је интервал дефинисаности решења диференцијалне једначине $t^3x'+t^2x-x^2=2t^4$ за које важи $x(1)=3/2$?

10. Решити диференцијалну једначину $t\ln tx'\operatorname{tg}x+1-t\cos x=0$.

11. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$2\sqrt{xt}=\frac{x-tx'}{x}$$

на области $\{t>0,x>0\}$. Наћи и партикуларно решење које тангира параболу $x=t^2$.

12. Решити диференцијалну једначину $2tx^3-2t^3x^3-4tx^2+2t+(3t^2x^2+4x)x'=0$.

(II) **Теореме**

Пикарова и Пеанова теорема

1. Дат је почетни проблем $x'=\frac{\chi_{[0,2]}(x)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{t-3}$, $x(0)=x_0$, $t\in[0,1]$, где је χ_A карактеристична функција скупа A. Проверити да ли су испуњени услови Пикарове теореме, ако је:
   - (а) $x_0=1$,
   - (б) $x_0=2$,
   - (в) $x_0=3$.

2. Дат је Кошијев проблем $x'=x-t+1$, $x(t_0)=x_0$.
   - (а) Доказати да су за произвољне t_0 и x_0 задовољени услови Пикарове теореме.
   - (б) Формирати итеративни низ функција из доказа Пикарове теореме и на тај начин одредити решење у случају $t_0=0$ и $x_0=1$.

3. Нека је $P(t)$ неконстантан полином. Да ли функција $x(t)=(t-1)^2P(t)$ може бити решење диференцијалне једначине $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$ дефинисано на некој отвореној околини тачке $t=1$, ако су $a(t)$ и $b(t)$ непрекидне функције?
   Помоћ: Зашто овде важи Пикарова теорема? Посматрати почетни проблем $x(1)=x'(1)=0$.

4. Испитати егзистенцију и јединственост решења Кошијевог проблема $x'=|x|\cos t$, $y(0)=0$, не решавајући диференцијалну једначину.

(III) **Линеарне диференцијалне једначине**

Експонент матрице, линеарни системи ДЈ са константним коефицијентима, линеарне ДЈ са константним коефицијентима

1. Дата је матрица $A=\begin{bmatrix}e&0&e\\0&e&0\\0&0&e\end{bmatrix}$.
   - (а) Решити систем $X'=AX$.
   - (б) Наћи барем једну матрицу B тако да важи $e^B=A$ или доказати да таква не постоји.

2. Дата је диференцијална једначина $X'=AX$, где је

$$A=\begin{bmatrix}\star&2&\star\\\star&-3&\star\\\star&\star&-3\end{bmatrix}.$$

   - (а) Заменити $\star$ у матрици A бројевима тако да једно решење једначине буде $X(t)=\begin{bmatrix}e^t-e^{-5t}\\e^t+e^{-5t}\\e^t\end{bmatrix}$.
   - (б) Наћи опште решење дате једначине (са матрицом добијеном у делу под (а).

(в) Наћи сва решења система за која важи $X'(0) = 2X(0)$.

3. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}$, где су $\alpha, \beta > 0$. Решити систем $X' = AX$ и у зависности од почетне вредности $X(0) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, наћи $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t)$.

4. Дат је Кошијев проблем $X'(t) = AX(t) + B(t)$, $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, где је $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

   (а) Решити дати Кошијев проблем ако је $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (б) Решити дати Кошијев проблем ако је $B(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-t \\ 2 \end{bmatrix}$, знајући да се једно решење система може наћи у облику вектора чији су елементи полиноми по t.

   (в) Решити дати Кошијев проблем ако је $B(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-t \\ 2 \end{bmatrix}$, без претпоставке о облику решења из дела (б).

5. (а) Одредити сва решења следећих једначина у скупу реалних квадратних матрица:

   (1) $A^2 e^A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; (2) $e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (б) Решити Кошијев проблем $X' = e^{-A}X$, $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, где је матрица A решење једначине из дела (2), уколико таква матрица постоји.

6. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, где је $a \in \mathbb{R}$.

   (а) Одредити параметар a тако да за матрицу A важи $\det\left(\left(\frac{d}{dx}e^{Ax}\right)|_{x=2}\right) = 8e^{12}$.

   (б) За матрицу A из дела (а), решити систем једначина $X' = AX$.

7. Наћи опште решење диференцијалне једначине $(x'' - 2x' - 3x)' = -16e^{-t} + 16te^{-t}$. Наћи и сва решења за која важи $x(0) = 1$ и која имају хоризонталну асимптоту кад $x \to +\infty$.

(IV) Парцијалне диференцијалне једначине

Метод карактеристика, метод првих интеграла

1. Методом карактеристика решити Кошијев проблэм за парцијалну диференцијалну једначину првог реда:

$$(x + 4y)z'_x + (-x + 5y)z'_y + 2z = x, \quad x = 2y, z = \sin y + \frac{x}{5}.$$

2. Решити парцијалну диференцијалну једначину $yu'_x - xu'_y = 0$, а потом одредити криву која је у пресеку графика решења чији су почетни услови $u_1(0, y) = |y|$ и $u_2(0, y) = 1 + \sqrt{1 - y^2}$.

3. Наћи опште решење парцијалне једначине

$$yz\frac{\partial u}{\partial x} + xz\frac{\partial u}{\partial y} + yx^5z^2(z^6 - 1)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

4. Наћи опште решење парцијалне диференцијалне једначине:

$$(y(x + y)^3 + z))z'_x + (x(x + y)^3 - z)z'_y = z(x + y).$$