Тврђење 52. (**Својства експонента.**)

(1) $e^{0} = \mathrm{Id}$; 0-нула матрица , $Id = I = E = id \in M_n(\mathbb{R})$

(2) $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^{A}e^{B}$;

(3) $AB = BA \Rightarrow Be^{A} = e^{A}B$; (специјално $A=B$: $Ae^A = e^A A$)

(4) $e^{A} = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{Id} + \frac{A}{n})^{n}$;

(5) за $U = \mathbb{R}^n$, тј. $A \in M_n(\mathbb{R})$ важи $\frac{d}{dt}e^{tA} = e^{tA}A = Ae^{tA}$;

(6) за $U = \mathbb{R}^n$ важи $\det e^{A} = e^{\mathrm{tr}\, A}$;

(7) за $U = \mathbb{R}^n$ важи $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^{A}P$.

в) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad (\lambda_{1/2} = \pm i)$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$$

$$A^3 = A^2 A = -E \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 A = -A \cdot A = -A^2 = -(-E) = E$$

$$A^k = \begin{cases} E, & r=0 \\ A, & r=1 \\ -E, & r=2 \\ -A, & r=3 \end{cases} = \begin{cases} (-1)^{l} \cdot E, & k=2l \\ (-1)^{l} \cdot A, & k=2l+1 \end{cases}$$

$k = 4t + r$

$r \in \{0,1,2,3\}$ $\quad A^k = A^{4t+r} = (A^4)^t \cdot A^r = E^t \cdot A^r = A^r$

$k = 2l+1 \;\vee\; k = 2l$

$l \geq 0 \qquad l \geq 0$

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot A^k = \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!} \cdot (-1)^{l}}_{\sin t} \cdot A + \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l}}{(2l)!} \cdot (-1)^{l}}_{\cos t} \cdot E = \sin t \cdot A + \cos t \cdot E = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = R_t$$

г) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = aE + b \cdot B \quad \text{из в)}$$

$$e^{tA} = e^{taE + tbB} \underset{(2)?}{=} e^{taE} \cdot e^{tbB} = \ldots = e^{at} \cdot R_{tb} \quad \to \text{доказати}$$

доказати: пример да (2) не важи увек: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $e^{A+B} \neq e^{A} \cdot e^{B}$

1. Испитати да ли $\exists A \in M_2(\mathbb{R})$ тд:

(1) Испитати да ли $\exists A \in M_2(\mathbb{R})$ тд:

а) $e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ б) $e^A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

у $\mathbb{R}$:
$e^a = b$
$b > 0$ ✓
$b \leq 0$ ✗

а) $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$ (6)

$\|$

$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\right) = -4$

$0 < e^{\operatorname{tr} A} = -4$ ↯

б) $\det(e^A) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\right) = 4$

$e^{\operatorname{tr} A} = 4 \Rightarrow \operatorname{tr} A = \ln 4$

(3) $Ae^A = e^A A$ $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{-\alpha = -\alpha} \\ -4\beta = -\beta \\ -\gamma = -4\gamma \\ \cancel{-4\delta = -4\delta} \end{array}\right\} \beta = \gamma = 0 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} e^\alpha = -1 \\ e^\delta = -4 \end{array} ↯$$

⊛ $A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \Rightarrow e^A = \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \quad \dots \quad A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

(2) $\lambda \in \mathbb{C}$ сопс. вр. од $A \Rightarrow e^\lambda$ сопс. вр. од e^A

I начин:

$Av = \lambda v$, $v \neq 0$

треба: $e^A v_1 = e^\lambda v_1$, за неко v_1 → узмемо исто v

$$e^{A} v = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right] v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k v}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k v}{k!} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right] \cdot v = e^{\lambda} \cdot v$$

$$A^k v = A^{k-1} \cdot (A v) = A^{k-1} \cdot (\lambda v) = \lambda A^{k-1} v = \lambda^2 A^{k-2} v = \ldots = \lambda^k v$$

II начин :

$$\det(A - \lambda E) = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \det(e^{A} - e^{\lambda} E) = 0$$

$$\det(e^{A} - e^{\lambda} E) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda E)^k}{k!} \right) = \ldots$$

довати

$$A^k - (\lambda E)^k = (A - \lambda E)(\ldots)$$