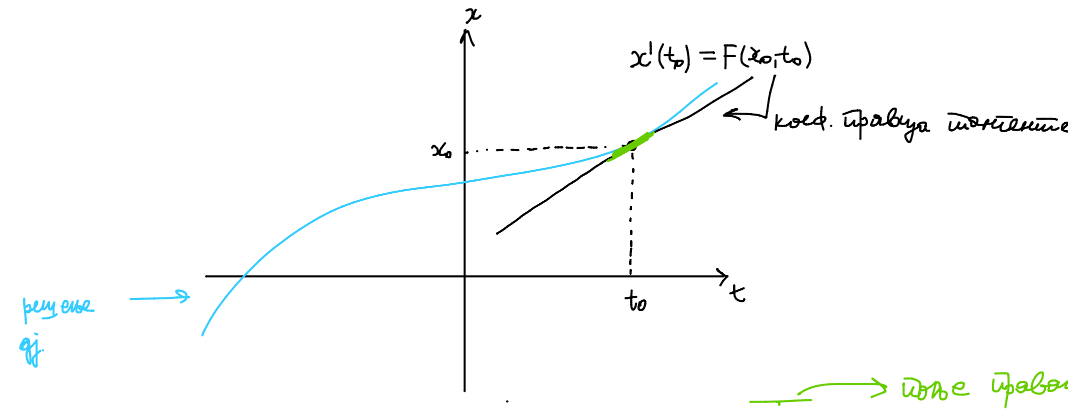
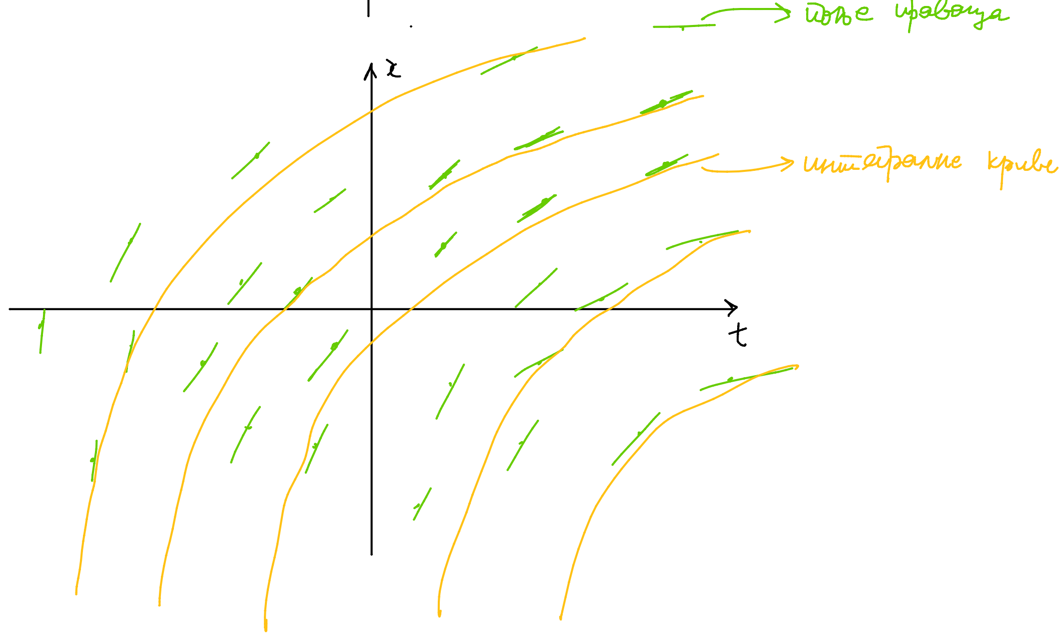
① Скицирати $\boxed{\text{поље правца}}$ дј. $x' = F(x,t)$. Не решавајући дј. скицирати њене $\boxed{\text{интегралне криве}}$.

а) $F(x,t) = -\frac{t}{x}$

б) $F(x,t) = 1 + t - x$





а) $F(x,t) = -\frac{t}{x}$

посматрамо све (t,x) т.д. $x' = F(x,t) = \underbrace{c}_{\text{нагиб}} \in \mathbb{R}$ (изоклине)

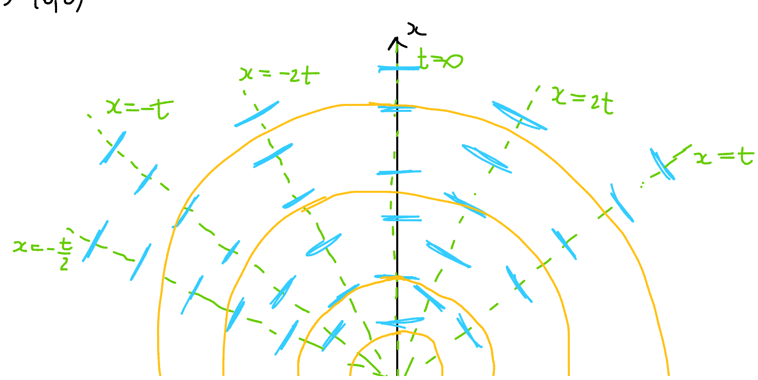
$$-\frac{t}{x} = c \Rightarrow -t = c \cdot x$$

↳ праве кроз $(0,0)$

$c=0$: $t=0$:

$c=1$: $x=-t$:

$c=-1$: $x=t$:



$C=-1$: $\quad x=t$:

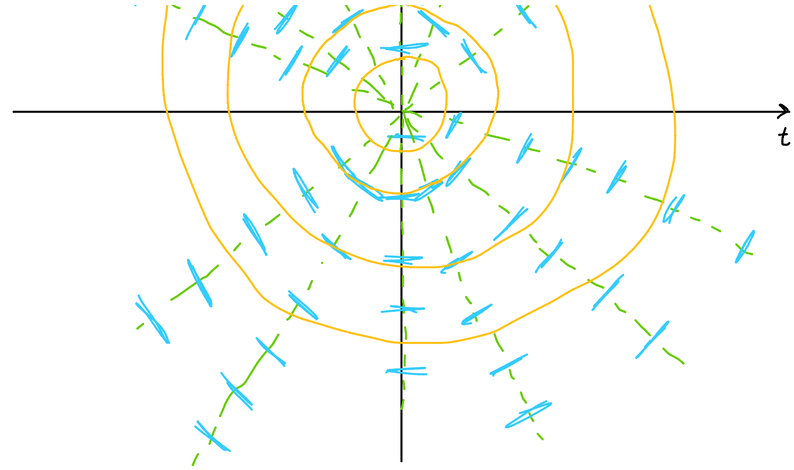
$C=2$: $\quad x=-\frac{t}{2}$:

$c=\frac{1}{2}$: $\quad x=-2t$:

$c=-\frac{1}{2}$: $\quad x=2t$:

$c=-2$

$c=3$



б) $F(x,t)=1+t-x$

$1+t-x=c$

$x=t+(1-c)\rightarrow$ праве $\parallel$ са $x=t$

$c=0$: $\quad x=t+1$

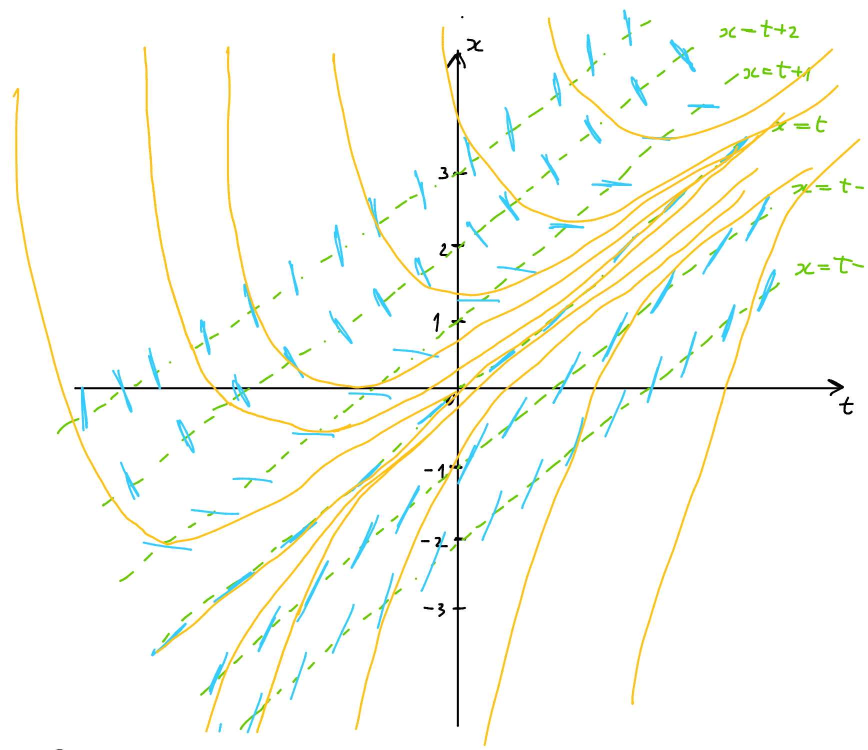
$C=1$: $\quad x=t$ ← решења дуж праве

$c=2$: $\quad x=t-1$

$c=3$: $\quad x=t-2$

$C=-1$: $\quad x=t+2$

$C=-2$: $\quad x=t+3$



Пикар: два решења не секу!

*сва решења имају косу асимптоту $x=t$.

In[1]:=
```
(*Rešenje obične DJ*)
solution1 = DSolve[x'[t] == x[t] + 2*t - 3, x[t], t]
```
Out[1]= $\{\{x[t] \to 1 - 2t + e^{t} c_1\}\}$

In[2]:=
```
(*Košijevo rešenje*)
solution2 = DSolve[{x'[t] == x[t] + 2*t - 3, x[0] == 2}, x[t], t]
```
Out[2]= $\{\{x[t] \to 1 + e^{t} - 2t\}\}$

In[3]:=
```
(*Još jedna DJ*)
solution3 = DSolve[t*x'[t] - 2*t*Sqrt[x[t]] == 4*x[t], x[t], t]
```
Out[3]= $\{\{x[t] \to t^2 - 2t^3 c_1 + t^4 c_1^2\}\}$

In[4]:=
```
(*Uprošćavanje*)
solution4 = FullSimplify[solution3]
```
Out[4]= $\{\{x[t] \to t^2 (-1 + t c_1)^2\}\}$

In[5]:=
```
(*Sistem DJ*)
solution5 = FullSimplify[DSolve[{x'[t] == y[t] - z[t], y'[t] == x[t]^2 + y[t], z'[t] == x[t]^2 + z[t]}, {x[t], y[t], z[t]}, t]]
```
Out[5]= $\{\{x[t] \to e^{t-c_3} + c_1,\ y[t] \to e^{2t-2c_3} - c_1^2 + e^{t-c_3}(c_1 + c_2 + 2c_1 \mathrm{Log}[e^{t-c_3}]),\ z[t] \to e^{2t-2c_3} - c_1^2 + e^{t-c_3}(-1 + c_1 + c_2 + 2c_1 \mathrm{Log}[e^{t-c_3}])\}\}$

In[6]:=
```
(*Bez FullSimplify*)
solution6 = DSolve[{x'[t] == y[t] - z[t], y'[t] == x[t]^2 + y[t], z'[t] == x[t]^2 + z[t]}, {x[t], y[t], z[t]}, t]
```
Out[6]= $\Big\{\Big\{x[t] \to e^{-c_3}(e^t + e^{c_3} c_1),\ y[t] \to (-c_1 + e^{-c_3}(e^t + e^{c_3} c_1))\, c_2 + (-c_1 + e^{-c_3}(e^t + e^{c_3} c_1))\Big(e^{-c_3}(e^t + e^{c_3} c_1) - \frac{c_1^2}{-c_1 + e^{-c_3}(e^t + e^{c_3} c_1)} + 2 c_1 \mathrm{Log}[-c_1 + e^{-c_3}(e^t + e^{c_3} c_1)]\Big),$

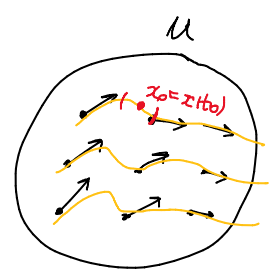
$z[t] \to c_1 - e^{-c_3}(e^t + e^{c_3} c_1) + (-c_1 + e^{-c_3}(e^t + e^{c_3} c_1))\, c_2 + (-c_1 + e^{-c_3}(e^t + e^{c_3} c_1))\Big(e^{-c_3}(e^t + e^{c_3} c_1) - \frac{c_1^2}{-c_1 + e^{-c_3}(e^t + e^{c_3} c_1)} + 2 c_1 \mathrm{Log}[-c_1 + e^{-c_3}(e^t + e^{c_3} c_1)]\Big)\Big\}\Big\}$

Пикарова и Пеанова теорема

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^k$

$x' = F(x, t)$, $\mathbb{R}^k \ni x$, $I \ni t$

Нека је $I \subseteq \mathbb{R}$ отворен интервал. Кажемо да је векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ локално униформно (по $t \in I$) Липшицово[1] по $\mathbf{x}$ ако свака тачка из $\mathcal{U}$ има околину $\mathcal{B}$ тако да важи $\|F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, t)\| \le L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, за неко $L > 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}$, $t \in I$.



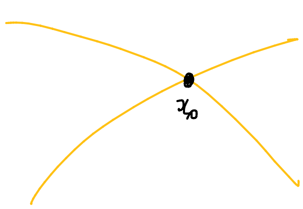
Теорема 67. **(Пикарова[2] теорема.)** *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ непрекидно и локално униформно (по t) Липшицово по $\mathbf{x}$. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ и $t_0 \in I$ постоји $\delta > 0$ и јединствено решење*

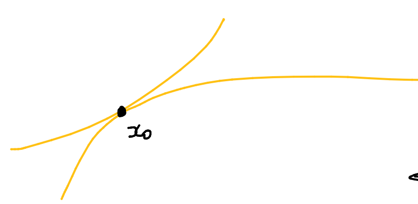
$$\mathbf{x} : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathcal{U}$$

Кошијевог проблема

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

$\boxed{\text{Е и Ј}}$





← ово не сме

Теорема 120. **(Пеанова[15] теорема)** *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^k$ непрекидно. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ постоји $\delta > 0$ и (не нужно јединствено) решење Кошијевог проблема*

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{71}$$

дефинисано на интервалу $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

$\boxed{\text{Е}}$

Само непрекидност

* ово су локалне Т!

(2) Испитати егзистенцију и јединственост решења Кошијевог проблема $x' = F(x,t)$, $x(0)=0$:

а) $F(x,t) = tx^3$

б) $F(x,t) = |x|^{1/2}\cdot t^2$

в) $F(x,t) = \dfrac{\ln x}{1-\sin x} + t$

а) $x' = tx^3$

$(t,x) \mapsto \underbrace{t\cdot x^3}_{\text{полиноми}} \Rightarrow F$ непр. $\Rightarrow$ Пеано $\Rightarrow \exists$ реш

(нпр. $x \equiv 0$)

$$\|F(x,t)-F(y,t)\| \le \underset{?}{L}\,\|x-y\| \;?$$

$$|F(x,t)-F(y,t)| \le L\cdot|x-y|$$

$$|F(x,t)-F(y,t)| = |tx^3-ty^3| = |t|\cdot|x^3-y^3| = |t|\cdot|x-y|\cdot|x^2+xy+y^2| \le \underbrace{12}_{L}\cdot|x-y|$$

$x(\underset{t_0}{0}) = 0 = x_0$

$x,y\in B(0)$ (околина 0), нпр. $x,y\in[-2,2] \Rightarrow |x^2+xy+y^2| \le |x^2|+|xy|+|y^2| \le 4+4+4 = 12$

$t\in(-1,1)$ → околина 0 $\Rightarrow |t|\le 1$

$\Rightarrow$ јесте лок. Лип. $\Rightarrow$ Пикарова Т $\Rightarrow \exists_1$ реш!

(*) $|tx^3-ty^3| = |t|\cdot\boxed{|x^3-y^3|}$ → ако је $f(x)$ C^1 ф-ја $\Rightarrow$ лок. Лип.

$f(x) = x^3$

$$L = \max_K |f'(x)|$$

$$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)|\cdot|x-y| \le L\cdot|x-y|$$

б) $x' = |x|^{1/2} \cdot t^2$

$$\left.\begin{array}{l} t^2 \\ |x| \\ |x|^{1/2} \end{array}\right\} \text{непр} \Rightarrow F \text{ непр} \Rightarrow \text{Пеано} \Rightarrow \exists \text{ реш.}$$

$$|F(x,t)-F(y,t)| \le L\cdot|x-y|$$

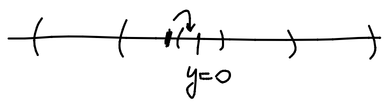
$$|F(x,t)-F(y,t)| = \left|t^2|x|^{1/2} - t^2|y|^{1/2}\right| = \underbrace{t^2}_{\le 1} \cdot \left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \le \underbrace{\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \overset{?}{\le} L\cdot|x-y|}_{\text{доказујемо да } \nexists L\in\mathbb{R}}$$

(у окол. 0)

$\forall x,y \Rightarrow \exists L$

$\nexists L \Rightarrow \exists x,y$ тд. не важи

$x,y \in B(0)$, бирамо $y=0$



$x \to 0$

$$\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|0|}\right| \le L\cdot|x-0|$$

$$\sqrt{|x|} \le L\cdot|x| \quad /:|x|$$

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \le L \quad /\lim_{x\to 0}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\infty \qquad L$$

$$\infty \le L \ ↯$$

$\Rightarrow F$ није лок. Лип. по x

$\Rightarrow$ не задов. Пикара

$\boxed{\text{НЕ ЗНАЧИ}}$ да реш није јединствено!

$x' = t^2\cdot\sqrt{|x|}$ $\qquad x\equiv 0$ ✓

x

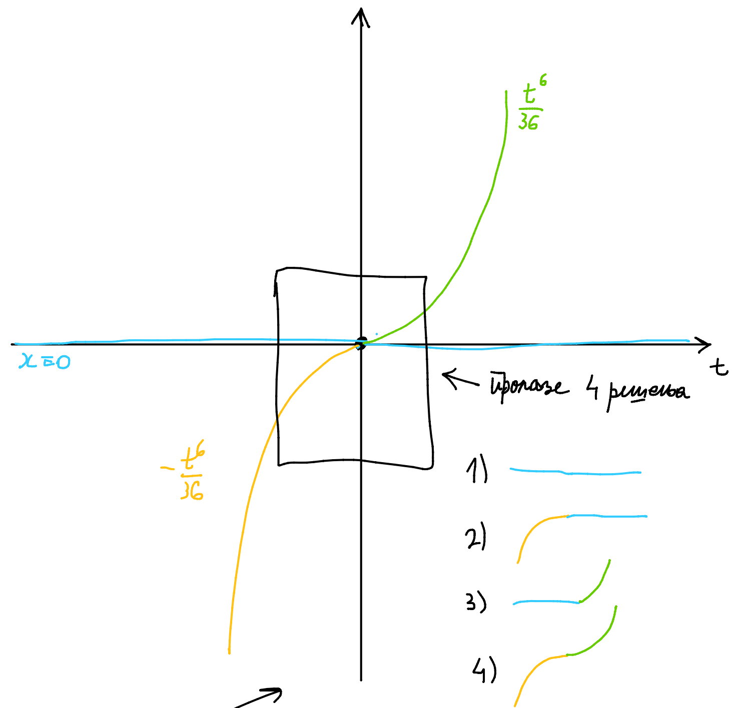
$x>0: \quad \frac{x'}{\sqrt{x}} = t^2 \; / \int$

$$2\sqrt{x} = \frac{t^3}{3} + C \rightarrow C=0 \; (x(0)=0) \quad (t>0)$$

$$x = \frac{t^6}{36}$$

$x<0: \quad \dots \quad (t<0)$

$$x = -\frac{t^6}{36}$$



Сва решења су C^∞

$$\left(\frac{t^6}{36}\right)^{(n)}(0)=0$$

$\Rightarrow$ није јединствено!

в) $x' = \frac{\ln x}{1-\operatorname{sgn} x} + t$

дефинисаност: $\ln x \Rightarrow \underline{x>0}$

$1-\operatorname{sgn} x \Rightarrow \operatorname{sgn} x \neq 1 \Rightarrow \underline{x \leq 0}$ $\Big\}$ ↯ $\Rightarrow$ нема реш