(1) $X' = AX$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1/2} = \lambda_{3/4} = \pm i$$

$\underbrace{\lambda_1 = i}$, $K=2$ $\quad \underline{0}+\underline{1}\cdot i$, $\alpha=0, \beta=1$ $\Big\} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} \quad \vee \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$m=2$ $\quad$ $m=1$

↳ 2 блока $\quad$ ↳ 1 блок

$(A - iE)\gamma_1 = 0$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{Re\gamma_1} + i \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{Im\gamma_1} \Rightarrow m = \dim_{\mathbb{C}} Ker(A - iE) = \dim_{\mathbb{C}} Lin\{\gamma_1\} = 1.$$

$\Rightarrow$ 1 Ж. блок

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2 реална век $=$ 1 компл. век

ако бисмо добили 2 сопств. век: $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}^4$

$$m=2 \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} Re\gamma_1 & Im\gamma_1 & Re\gamma_2 & Im\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad e^{tD} = \begin{bmatrix} R_t & \\ & R_t \end{bmatrix}$$

$P = ?$ γ_2 - уопштени за γ_1

$$(A - iE)\gamma_2 = \gamma_1 \quad \therefore \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1-i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} Re\gamma_1 & Im\gamma_1 & Re\gamma_2 & Re\gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tD} = ? \qquad D = \begin{bmatrix} R & E \\ O & R \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \underbrace{\begin{bmatrix} R & \\ & R \end{bmatrix}}_{= \dot{J}} + \underbrace{\begin{bmatrix} & E \\ & \end{bmatrix}}_{= N}$$

$$(\dot{J} \cancel{\times} E)$$

$$\dot{J}N = \begin{bmatrix} R & O \\ O & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & E \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & RE \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & R \\ O & O \end{bmatrix},$$

$$N\dot{J} = \begin{bmatrix} & E \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \\ & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & ER \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & R \\ O & O \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{J}N = N\dot{J} \overset{(2)}{\Rightarrow} e^{tD} = e^{t\dot{J}} \cdot e^{tN}$$

$$e^{t\dot{J}} = \begin{bmatrix} e^{tR} & \\ & e^{tR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_t & \\ & \mathcal{R}_t \end{bmatrix}$$

$$e^{tN} = \underbrace{E}_{4\times4}^{k=0} + \overset{k=1}{t \cdot N} = \begin{bmatrix} E & tE \\ & E \end{bmatrix}$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} & E \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & E \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N^k = O, \quad k \geqslant 2$$

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_t & \\ & \mathcal{R}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & tE \\ & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_t E & t\mathcal{R}_t E \\ O & \mathcal{R}_t E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_t & t\mathcal{R}_t \\ O & \mathcal{R}_t \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & t\cos t & t\sin t \\ -\sin t & \cos t & -t\sin t & t\cos t \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

$$\text{ОР}: \; X(t) = P \cdot e^{tD} \cdot c, \quad c \in \mathbb{R}^4$$

```
>> A=[-1 0 -1 0; 1 0 1 1; 2 0 1 0; 1 -1 0 0]

A =

    -1     0    -1     0
     1     0     1     1
     2     0     1     0
     1    -1     0     0

>> [P D] = jordan(A)

P =

   0.0000 + 0.0000i   0.5000 - 0.5000i   0.0000 + 0.0000i   0.5000 + 0.5000i
   0.5000 + 0.5000i   0.0000 + 0.0000i   0.5000 - 0.5000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 1.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 1.0000i
   0.5000 - 0.5000i   0.0000 + 0.0000i   0.5000 + 0.5000i   0.0000 + 0.0000i


D =

   0.0000 - 1.0000i   1.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 1.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 1.0000i   1.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 1.0000i
```

(2) Методом елиминације решити систем:

изразити из 1 и убацити у 2

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= 1 - \frac{1}{x_2} \\ x_2' &= \frac{1}{x_1 - t} \end{aligned}\right\} \qquad x_1(t), x_2(t)$$

2 јне реда 1

→ 1 јне реда 2

$$1 - x_1' = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{1 - x_1'}$$

$x_2 \quad \quad 1-x_1'$

$$x_2' = -\frac{1}{(1-x_1')^2}\cdot(-x_1'') = \frac{x_1''}{(1-x_1')^2}$$

$$\frac{x_1''}{(1-x_1')^2} = \frac{1}{x_1-t}$$

$, \quad x_1 - t = y_1$

$x_1' - 1 = y_1'$

$x_1'' = y_1''$

$$\Rightarrow \frac{y_1''}{y_1'^2} = \frac{1}{y_1}$$

$$y_1 y_1'' = y_1'^2$$

$$y_1 y_1'' - y_1'^2 = 0 \;/ : y_1^2$$

$(x\cdot x')' = x'^2 + x x''$

$\left(\frac{x'}{x}\right)' = \frac{x''\cdot x - x'^2}{x^2}$

$$\frac{y_1 y_1'' - y_1'^2}{y_1^2} = 0$$

$/\int$

$$\left(\frac{y_1'}{y_1}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{y_1'}{y_1} = c \Rightarrow y_1' = c y_1 \quad (\text{РП})$$

$\vdots$

$$y_1(t) = c_1\cdot e^{ct} \quad , c, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = t + c_1 e^{ct}.$$

$$x_2' = \frac{1}{x_1 - t} = \frac{1}{c_1 e^{ct}} \Rightarrow x_2 = c_2 - \frac{1}{c_1 c} e^{-ct}$$

→ три константе → превише (2)

→ провера у почетну

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= 1 - \frac{1}{x_2} \\ x_1' &= 1 + c c_1 e^{ct} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{1}{x_2} = -c c_1 e^{ct}$$

$$x_2 = -\frac{1}{c c_1} e^{-ct}$$

Нехомогени ЛСДЈКК: $X' = AX + g(t)$

↳ нехомогени део

ОР: $X(t) = X_H(t) + X_p(t)$

↙ ОР хомогене

↘ ПР нехомогене

доказ: $X' = X_H' + X_p'$

$$X' = AX + g \iff X_H' + X_p' = A(X_H + X_p) + g$$

$$X_H' + X_p' = AX_H + AX_p + g \checkmark$$

ОР хомогене ↙ → ПР нехомогене

(за дату лин. једн)

$$X' = AX + g \iff X_H' + X_p' = A(X_H + X_p) + g$$

$$\underline{X_H'} + \underline{X_p'} = \underline{AX_H} + \underline{AX_p + g} \checkmark$$

нека ПР је $X_p(t) = \underline{e^{tA}} \cdot \int e^{-tA} \cdot g(t)\, dt.$

↳ по компонентама

доказ: хоћемо $X_p' = AX_p + g$

$$X_p' = (e^{tA})' \cdot \int e^{-tA} g(t)\, dt + e^{tA} \cdot \left(\int e^{-tA} \cdot g(t)\, dt\right)' =$$

$$= Ae^{tA} \cdot \int e^{-tA} g(t)\, dt + \underbrace{e^{tA} \cdot e^{-tA}}_{E} \cdot g(t) =$$

$$= A\boxed{e^{tA} \cdot \int e^{-tA} g(t)\, dt} + g(t) =$$

$$= AX_p + g$$

ОР: $X(t) = e^{tA} \cdot c + e^{tA} \cdot \int e^{-tA} g(t)\, dt = e^{tA}\left(c + \int e^{-tA} g(t)\, dt\right)$

напомена 1: постоји и формула за $X'(t) = A(t) \cdot X(t) + g(t)$ — уместо e^{tA} иде фундаментална матрица $\Phi(t)$

$$X_p(t) = \Phi(t) \cdot \int \Phi^{-1}(t) g(t)\, dt.$$

напомена 2: упоредимо са $x' + p\,x = g(t)$ $(n=1)$

$$x_p(t) = e^{-pt} \cdot \int e^{pt} \cdot g(t)\, dt$$

③ а) $x_1' = x_2 + \frac{1}{\cos^2 t}$

$x_2' = -x_1 + \operatorname{tg} t$

б) $x_1' = x_1 + x_2 - \cos t$

$x_2' = -2x_1 - x_2 + \sin t + \cos t$

домаћи: $\begin{bmatrix} \sin t + \cos t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix} \cdot c + \begin{bmatrix} -t\cos t \\ t(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{R}^2$

$$X' = AX + g$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos^2 t} \\ \operatorname{tg} t \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = R_t = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = R_t = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$e^{-tA} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}^{-1} = \ldots \quad , \quad e^{-tA} = R_{-t} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\cos t} - \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t}\big(\underbrace{1-\sin^2 t}_{=\cos^2 t}\big) = \cos t$$

$$\int e^{-tA} \cdot g(t)\,dt = \int \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ \operatorname{tg} t \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos t} - \frac{\sin^2 t}{\cos t} \\ \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \sin t \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} \cos t \\ \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \sin t \end{bmatrix} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} \int \cos t\,dt \\ \int \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \sin t\right) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \frac{1}{\cos t} - \cos t \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{-dx}{x^2} = \frac{1}{x} + c = \frac{1}{\cos t} + c$$

$\cos t = x$

$dx = -\sin t\,dt$

$$X_p(t) = e^{tA} \cdot \int e^{-tA} g(t)\,dt = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ \frac{1}{\cos t} - \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \cancel{\cos t} + \operatorname{tg} t - \sin t \cancel{\cos t} \\ -\sin^2 t + \cancel{1} - \cos^2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$-(\sin^2 t + \cos^2 t) = -\cancel{1}$

ОР: $X(t) = R_t \cdot c + \begin{bmatrix} \operatorname{tg} t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}^2$

систем ↔ јна вишег реда

(4) $x_1' = p x_1 - q x_2$ $\qquad p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x_2' = q x_1 + p x_2$ (*)

2 јне 1. реда → 1 јна 2. реда

елиминација: $x_1' = p x_1 - q x_2 \Rightarrow x_2 = \dfrac{p x_1 - x_1'}{q} \;/'$

$$x_2' = \frac{p x_1' - x_1''}{q}$$

$$\frac{p x_1' - x_1''}{q} = q x_1 + p \cdot \frac{p x_1 - x_1'}{q}$$

$$p x_1' - x_1'' = q^2 x_1 + p^2 x_1 - p x_1'$$

домаћи: решити (*) и (#) и упоредити их

сл. часа

$$x_1'' - 2p x_1' + (p^2+q^2)\, x_1 = 0 \quad (\#)$$

⑤ $x''' - 2x'' + x = 0$ 1 јна 3. реда → 3 јне 1. реда

$x_1 = x$

$x_2 = x'$

$x_3 = x''$

$$x_1' = x' = x_2$$
$$x_2' = x'' = x_3$$
$$x_3' = x''' = 2x'' - x = 2x_3 - x_1$$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= 2x_3 - x_1 \end{aligned}\right\}$$

⑥ $\left.\begin{aligned} x''' &= t y' - \sin t \cdot x' + t \\ y'' &= x'' - \cos(x' \cdot y) \end{aligned}\right\}$ 3. реда + 2. реда = 5. реда = 5 јна 1. реда

$x_1 = x$

$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= x' \\ x_3 &= x'' \end{aligned}}$

$y_1 = y$

$\boxed{y_2 = y'}$

$$x''' = x_3' = t y_2 - \sin t \cdot x_2 + t$$
$$y'' = y_2' = x_3 - \cos(x_2 \cdot y_1)$$

систем,
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= t y_2 - \sin t \cdot x_2 + t \\ y_1' &= y_2 \\ y_2' &= x_3 - \cos(x_2 \cdot y_1) \end{aligned}$$