Шта је ДЈ? $f(t,x,x',\dots,x^{(n)})=0 \rightsquigarrow x(t)=?$

пр. $e^{x'}\cdot x^{(III)} - 3xt = 0$ → 3. реда

ред ДЈ = ред највећег извода који се јавља

$$x^{(n)} = f(t,\dots,x^{(n-1)})$$

ОДЈ – обичне ДЈ $\quad x(t) \rightsquigarrow x',\dots,x^{(n)}$

ПДЈ – парцијалне ДЈ $\quad u(x_1,\dots,x_n) \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x_1 \partial x_2}\dots\right)$, $n\geq 2$

$x(t), y(x) \qquad x'(t)=x'=\frac{dx}{dt}=\dot{x}(t)=\dot{x}$

① Решити ДЈ:

наћи сва решења (обично ∞ много)

$$x' = e^t+2t \;/\int$$

$$x(t)=e^t+t^2+c,\ c\in\mathbb{R}$$

② Наћи све диф. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ т.д. $\int_0^x f(t)\,dt = f(x) \;/'$

$$f(x)=f'(x) \xrightarrow{\text{касније}} f(x)=c\cdot e^x,\ c\in\mathbb{R}$$

АН1:

$$f-f'=0 \;/\cdot e^{-x}$$
$$fe^{-x}-f'e^{-x}=0$$
$$-(fe^{-x})'=0$$
$$fe^{-x}=c$$

$$\int_0^x ce^t\,dt = ce^x$$
$$ce^t\Big|_0^x = ce^x$$
$$c(e^x-1)=ce^x \Rightarrow c=0$$
$$f\equiv 0$$

опште решење (ОР): облик који описује сва решења $\quad f(x)=c\cdot e^x$

партикуларно решење (ПР): једно решење $\quad f(x)=2e^x,\ f(x)\equiv 0$

③ $x'=kx$, $k\neq 0$

$$\frac{x'}{x}=k \leftarrow \cancel{x\neq 0}$$

$$(\ln|x|)'=k \;/\int$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}\cdot(|x|)' = \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|} = \frac{\operatorname{sgn} x}{x\cdot \operatorname{sgn} x} = \frac{1}{x}$$

↑ $x\neq 0$

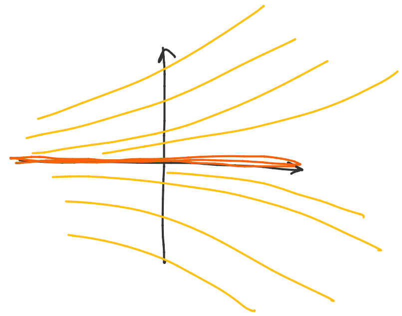
$$\ln|x| = kt+c,\ c\in\mathbb{R}$$

x диф $\Rightarrow$ x непр.

$\ln|x| = kt + c \quad , c\in\mathbb{R} \qquad / \, e^{\square}$

$|x| = e^{kt+c} = \underbrace{e^{c}}_{c_1}\cdot e^{kt} = c_1\cdot e^{kt} \quad , c_1>0$

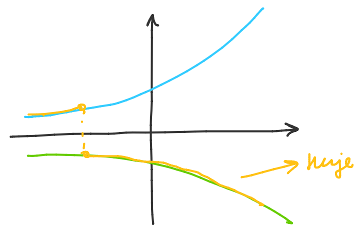
$x = c_2\cdot e^{kt} \quad , c_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$



$x \equiv 0$ ✓

$x = c_3\cdot e^{kt} \quad , c_3\in\mathbb{R}$

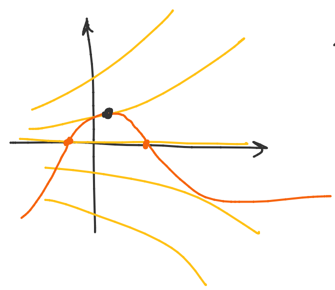
x диф ⟹ x непр.



Пикарова Т (касније):

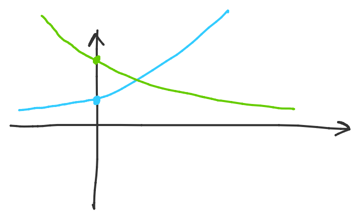
за довољно лепе ДЈ,

решења се не секу



$k<0$ — радиоактивни распад

$k>0$ — експоненцијални раст

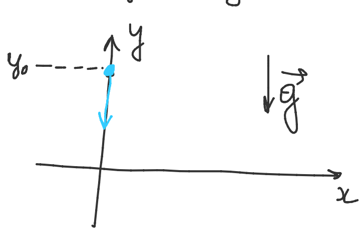


Кошијев проблем: $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ → почетни услов (Кошијев)

n-тог реда: $x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$

$n\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$

④ Слободан пад



$x(t)$ положај

$\dot{x}(t) = v(t)$ брзина

$\ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = a(t)$

убрзање

II Њутнов закон

II Њутнов закон $m\ddot{a} = \vec{F}$

$$X(t) = (x(t), y(t))$$

$$\vec{g} = (0, -g)$$

$$g > 0$$

$\ddot{X} = \vec{g}$ → систем ДЈ

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned}\right\}$$

почетни услови: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow x = c_1 t + c_2$$

$$\ddot{y} = -g \Rightarrow \dot{y} = -gt + c_3 \Rightarrow y = -\frac{gt^2}{2} + c_3 t + c_4$$

$$c_2 = 0 \qquad c_1 = 0$$

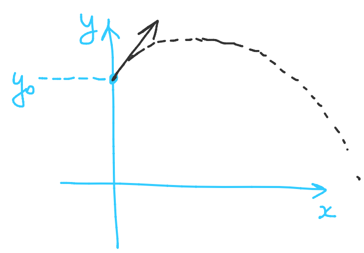
$$c_4 = y_0 \qquad c_3 = 0 \qquad \Rightarrow X(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 - \frac{gt^2}{2} \end{bmatrix}$$

домаћи: Коси хитац

$$\ddot{X} = \vec{g}$$

$x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_x$

$y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = v_y$



Типови ДЈ:

$\boxed{0}$ Раздвајање променљивих

$$x'(t) = \frac{f(t)}{g(x)} \qquad f \in C(a,b), \quad g \in C(c,d), \ g \neq 0$$

ОР: $\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(u)\,du = \int_{t_0}^{t} f(v)\,dv$ $\left(\int g(x)\,dx = \int f(t)\,dt\right)$

интуитивно:

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{g(x)} \Rightarrow \int g(x)\,dx = \int f(t)\,dt \;/\int$$

(5) $tx' = x$, ОР и ПР т.д. $x(-3) = \frac{1}{3}$.

$x \neq 0 \longrightarrow$
$t \neq 0$
$\frac{x'}{x} = \frac{1}{t} \Big/ \int \Rightarrow \ln|x| = \ln|t| + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = c_1 \cdot |t|,\ c_1 > 0$

(РП)

$x = c_2 \cdot t,\ c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \equiv 0$ ✓

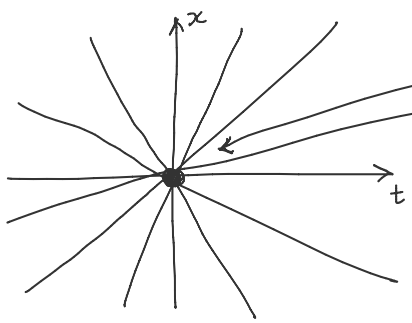
$\left(x' = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \right)$

ОР: $\underline{x = c_3 t}$, $c_3 \in \mathbb{R}$

ПР: $x(-3) = \frac{1}{3}$

$\left.\begin{array}{l} t = -3 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$ $\quad \frac{1}{3} = c_3 \cdot (-3) \Rightarrow c_3 = -\frac{1}{9}$

$x(t) = -\frac{t}{9}$



не важи Пикар

$x' = \frac{x}{t}$

$t \neq 0$

$t = 0$: $0 \cdot x'(0) = x(0) \Rightarrow (t, x) = (0, 0) \in$ свим решењима

(6) $x' = \frac{2xt}{t^2 - 1}$. Решити ДЈ, скицирати решења, наћи ПР: а) $x(0) = 1$

б) $x(2) = 1$

$\frac{x'}{x} = \frac{2t}{t^2 - 1} \Big/ \int \Rightarrow \ln|x| = \ln|t^2 - 1| + c,\ c \in \mathbb{R}$

РП

$|x| = c_1 \cdot |t^2 - 1|,\ c_1 > 0$

$x = c_2 \cdot (t^2 - 1),\ c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \equiv 0$ ✓

ОР: $x = c_3 (t^2 - 1),\ c_3 \in \mathbb{R}$

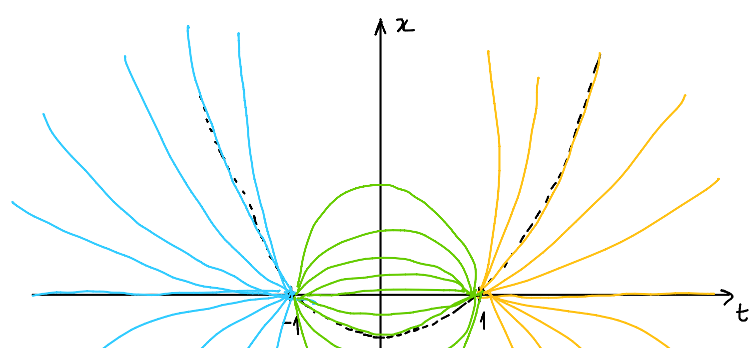
$|t| \neq 1$

ДЈ решавамо по интервалима!

1° $t \in (-\infty, -1)$

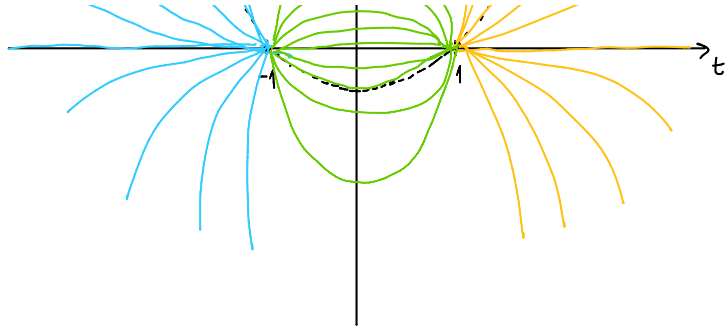
2° $t \in (-1, 1)$

3° $t \in (1, +\infty)$



$2^\circ\ t \in (-1,1)$

$3^\circ\ t \in (1,+\infty)$



пр: а) $x(0)=1$

$0 \in (-1,1) \Rightarrow t \in (-1,1)$

$1 = c_3(0^2-1) \Rightarrow c_3 = -1$

$x(t) = 1-t^2,\ t \in (-1,1)$

б) $x(2)=1$

$2 \in (1,+\infty) \Rightarrow t \in (1,+\infty)$

$1 = c_3(2^2-1) \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}$

$x(t) = \frac{1}{3}(t^2-1),\ t>1$

7 Наћи све C^1 функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ тд. $f(0)=1$ и

површина испод графика од 0 до x_0 од f

$=$

дужини лука од 0 до x_0 од f, $\forall x_0>0$.

$$\int_0^{x_0} f(x)\,dx = \int_0^{x_0} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,\ \forall x_0>0 \quad \Big/ '_{x_0}$$

$$f(x_0) = \sqrt{1+(f'(x_0))^2} \quad \Big/^2 \Rightarrow f \geq 1$$

$$f^2 = 1 + f'^2$$

$$f'^2 = f^2-1$$

$$f' = \pm \sqrt{f^2-1}$$

?

$f(0)=1$

$f' = -\sqrt{f^2-1} \Rightarrow f' \leq 0 \Rightarrow f$ опада $\Rightarrow f \leq 1 \Rightarrow \underline{f=1}$ ✓

$$f' = \sqrt{f^2-1}$$

$$\frac{f'}{\sqrt{f^2-1}} = 1 \quad (\text{РП}) \quad \Big/ \int$$

$\vdots$

1 $x' = f(\alpha x + \beta t + \gamma)$

1) $x' = f(\alpha x + \beta t + \gamma)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$

смена: $x(t) \to y(t)$

$y(t) = \alpha x(t) + \beta t + \gamma \quad / \frac{d}{dt}$

$y' = \alpha x' + \beta \Rightarrow x' = \frac{y' - \beta}{\alpha}$

$\rightsquigarrow$ РП

8) а) $x' = x + 2t - 3$

б) $x' = (x+t)^2$

б) $f(z) = z^2$ $\qquad x + t \rightsquigarrow \alpha = \beta = 1, \gamma = 0$

$y = x + t$

$y' = x' + 1 \Rightarrow x' = y' - 1$

$$y' - 1 = y^2 \Rightarrow y' = y^2 + 1 \overset{РП}{\Rightarrow} \frac{y'}{y^2+1} = 1 \quad / \int$$

$$\cancel{\Downarrow} \qquad \frac{y'-1}{y^2} = 1$$

$\operatorname{arctg} y = t + c, \ c \in \mathbb{R}$

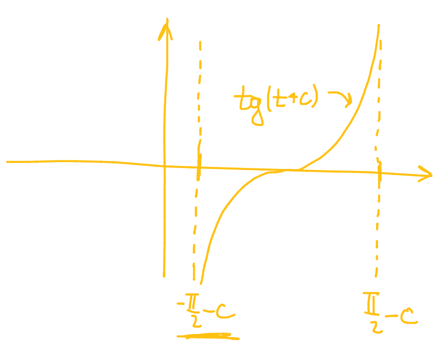
$y = \operatorname{tg}(t+c)$

$x + t = \operatorname{tg}(t+c)$

ОР: $x = \operatorname{tg}(t+c) - t$, $c \in \mathbb{R}$.

НАП: $\operatorname{arctg} y = t + c \Rightarrow t + c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$-\frac{\pi}{2} - c < t < \frac{\pi}{2} - c$



∞ реш, али свако је деф. на различитом интервалу