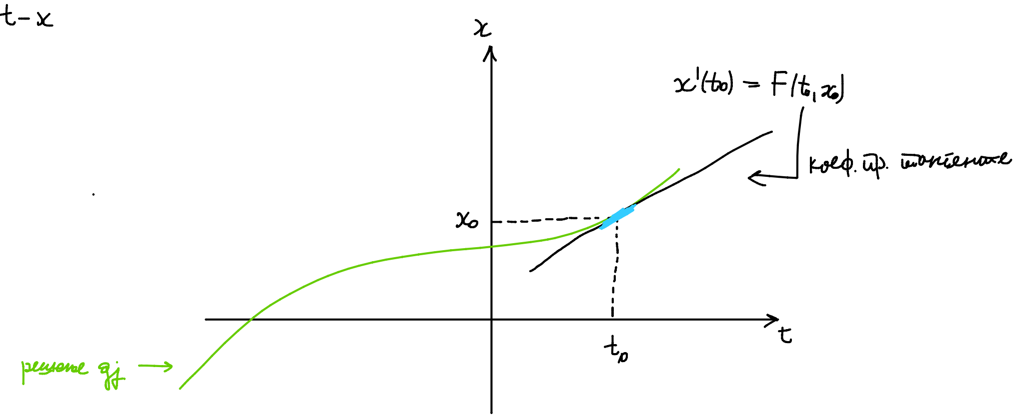
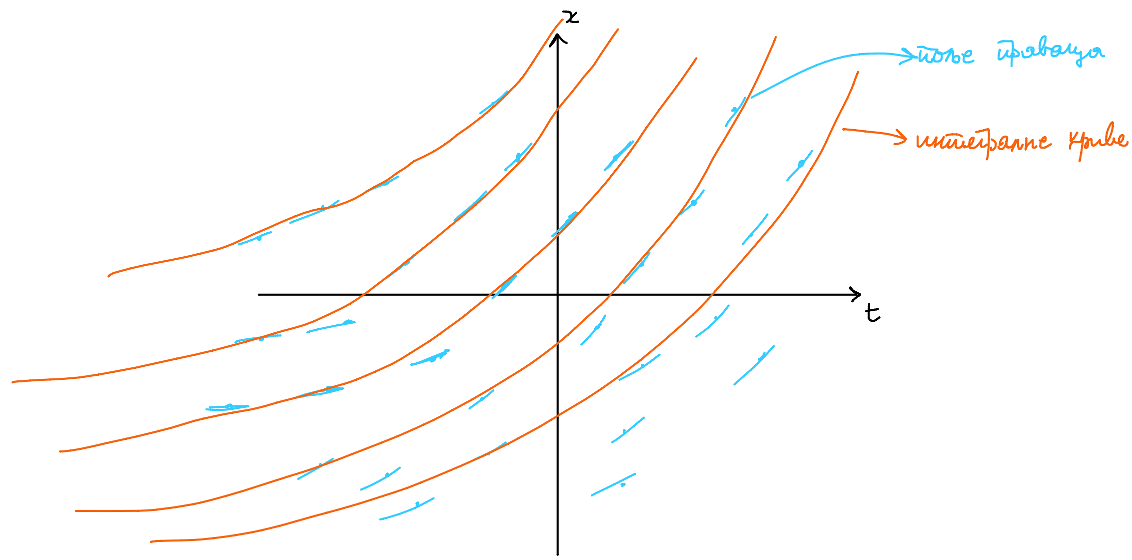
(1) Скицирати $\boxed{\text{поље правца}}$ дј. $x' = F(t,x)$. Не решавајући дј. скицирати њене $\boxed{\text{интегралне криве.}}$

а) $F(t,x) = -\frac{t}{x}$

б) $F(t,x) = 1 + t - x$





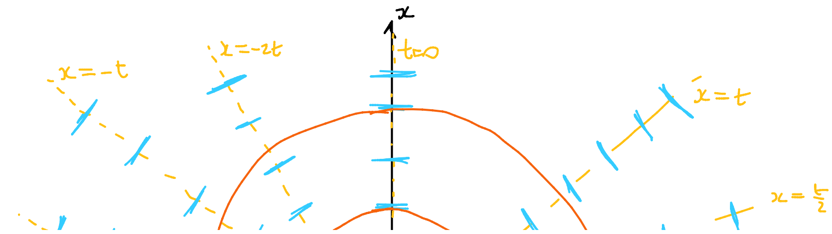
а) $x' = -\frac{t}{x}$

посматрамо све (t,x) тд. $x' = F(t,x) = \underbrace{C}_{\text{нагиб}} \in \mathbb{R}$ (изоклине)

$-\frac{t}{x} = c \Rightarrow \underbrace{-t = cx}_{\text{праве кроз } (0,0).}$

$c=0$: $t=0$:

$c=1$: $x=-t$:



$c=1:$ $\quad x=-t:$

$c=-1:$ $\quad x=t:$

$c=2:$ $\quad x=-\frac{t}{2}:$

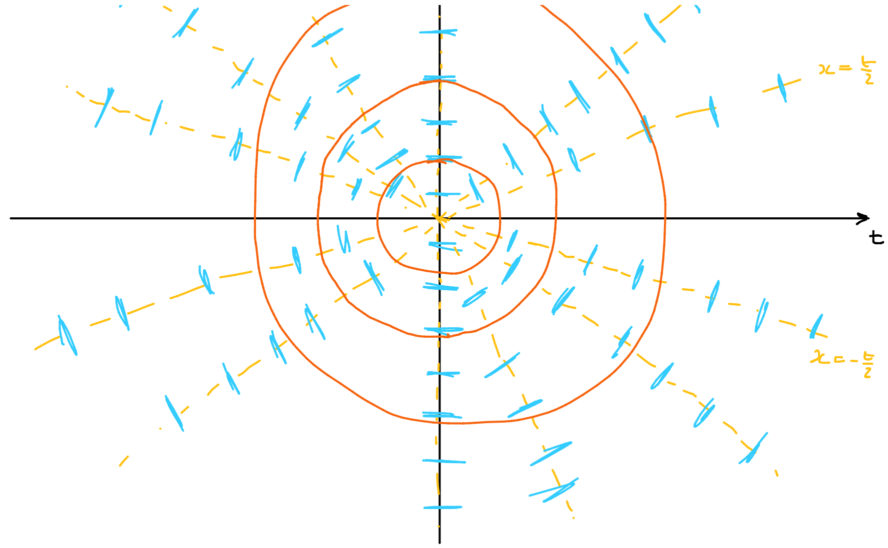
$c=\frac{1}{2}:$ $\quad x=-2t:$

$c=-2:$ $\quad x=\frac{t}{2}:$

$c=-\frac{1}{2}$

$c=3$

$\vdots$



б) $F(t,x)=1+t-x$

$1+t-x=c$

$x=t+(1-c)$ → праве $\parallel$ са $x=t$

$c=0:$ $\quad x=t+1$

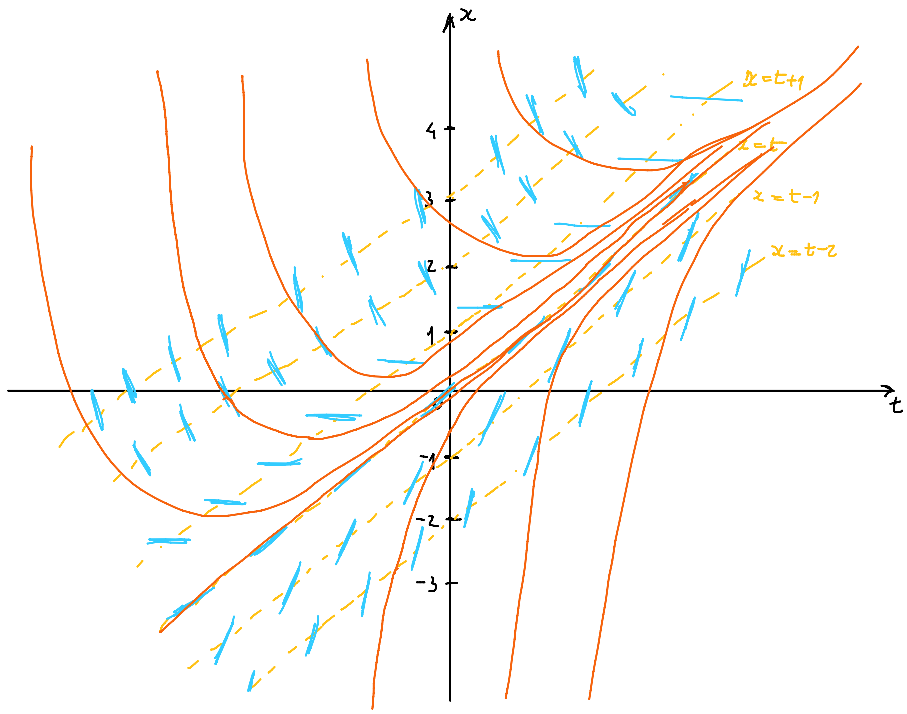
$c=1:$ $\quad x=t$ ← друге праве

$c=2:$ $\quad x=t-1$

$c=3:$ $\quad x=t-2$

$c=-1:$ $\quad x=t+2$

$c=-2:$ $\quad x=t+3$



Пикар: два решења се не секу!

* сва реш. имају косу асимптоту $x=t$

In[1]:=
```
(*Rešenje obične DJ*)
solution1 = DSolve[x'[t] == x[t] + 2*t - 3, x[t], t]
```
Out[1]= $\{\{x[t] \to 1 - 2t + e^{t} c_1\}\}$

In[2]:=
```
(*Košijevo rešenje*)
solution2 = DSolve[{x'[t] == x[t] + 2*t - 3, x[0] == 2}, x[t], t]
```
Out[2]= $\{\{x[t] \to 1 + e^{t} - 2t\}\}$

In[3]:=
```
(*Još jedna DJ*)
solution3 = DSolve[t*x'[t] - 2*t*Sqrt[x[t]] == 4*x[t], x[t], t]
```
Out[3]= $\{\{x[t] \to t^2 - 2t^3 c_1 + t^4 c_1^2\}\}$

In[4]:=
```
(*Uprošćavanje*)
solution4 = FullSimplify[solution3]
```
Out[4]= $\{\{x[t] \to t^2 (-1 + t c_1)^2\}\}$

In[5]:=
```
(*Sistem DJ*)
solution5 = FullSimplify[DSolve[{x'[t] == y[t] - z[t], y'[t] == x[t]^2 + y[t], z'[t] == x[t]^2 + z[t]}, {x[t], y[t], z[t]}, t]]
```
Out[5]= $\{\{x[t] \to e^{t-c_3} + c_1,\ y[t] \to e^{2t-2c_3} - c_1^2 + e^{t-c_3}(c_1 + c_2 + 2 c_1 \mathrm{Log}[e^{t-c_3}]),\ z[t] \to e^{2t-2c_3} - c_1^2 + e^{t-c_3}(-1 + c_1 + c_2 + 2 c_1 \mathrm{Log}[e^{t-c_3}])\}\}$

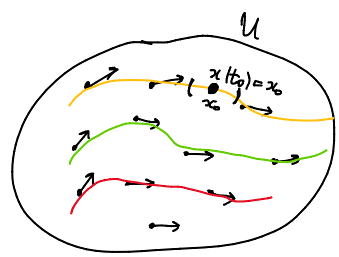
In[6]:=
```
(*Bez FullSimplify*)
solution6 = DSolve[{x'[t] == y[t] - z[t], y'[t] == x[t]^2 + y[t], z'[t] == x[t]^2 + z[t]}, {x[t], y[t], z[t]}, t]
```
Out[6]= $\Big\{\Big\{x[t] \to e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1),\ y[t] \to (-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1))\, c_2 + (-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1)) \left(e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1) - \frac{c_1^2}{-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1)} + 2 c_1 \mathrm{Log}[-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1)]\right),$

$z[t] \to c_1 - e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1) + (-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1))\, c_2 + (-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1)) \left(e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1) - \frac{c_1^2}{-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1)} + 2 c_1 \mathrm{Log}[-c_1 + e^{-c_3}(e^{t} + e^{c_3} c_1)]\right)\Big\}\Big\}$

Пикарова и Пеанова теорема

$x' = F(t, x)$, $t \in I$, $x \in \mathcal{U}$

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^k$



Нека је $I \subseteq \mathbb{R}$ отворен интервал. Кажемо да је векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ локално униформно (по $t \in I$) Липшицово[1] по $\mathbf{x}$ ако свака тачка из $\mathcal{U}$ има околину $\mathcal{B}$ тако да важи $\|F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, t)\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, за неко $L > 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}$, $t \in I$.

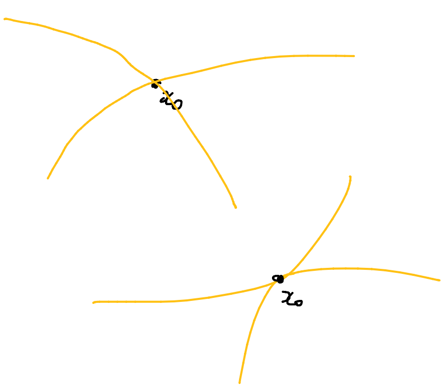
Теорема 67. **(Пикарова[2] теорема.)** *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ непрекидно и локално униформно (по t) Липшицово по $\mathbf{x}$. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ и $t_0 \in I$ постоји $\delta > 0$ и јединствено решење*

$$\mathbf{x} : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathcal{U}$$

$\boxed{\text{Е и Ј}}$

Кошијевог проблема

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$



← Ово не сме да се деси!

Теорема 120. **(Пеанова[15] теорема)** *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^k$ непрекидно. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ постоји $\delta > 0$ и (не нужно јединствено) решење Кошијевог проблема*

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{71}$$

дефинисано на интервалу $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

само непрекидност

$\boxed{\exists}$

ово су локалне Т!

(2) Испитати егзистенцију и јединственост решења Кошијевих проблема $x' = F(x,t)$, $x(0) = 0$:

а) $F(x,t) = tx^3$

б) $F(x,t) = |x|^{1/2} \cdot t^2$

в) $F(x,t) = \dfrac{\ln x}{1 - \operatorname{sgn} x} + t$

а) $x' = \underline{tx^3}$

$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

t, x^3 полиноми $\Rightarrow$ непрекидне $\Rightarrow$ F непр. $\Rightarrow$ важи Пеанова Т $\Rightarrow$ $\exists$ реш.

(нпр. $x \equiv 0$)

$x, y \in B(0)$

$$\|F(x,t) - F(y,t)\| \overset{?}{\leq} L \cdot \|x - y\|$$

$$|F(x,t) - F(y,t)| \leq L \cdot |x - y|$$

$$|tx^3 - ty^3| \leq L \cdot |x - y|$$

$$|t| \cdot \cancel{|x-y|} \cdot |x^2 + xy + y^2| \leq L \cdot \cancel{|x-y|}$$

$$|t| \cdot |x^2 + xy + y^2| \leq L$$

$t \in [-1,1]$ нпр. $(t \in [-\delta, \delta])$

↳ околина 0

$x(0) = 0$

$x, y \in [-1,1]$ нпр.

↳ околина 0

$$\underbrace{|t|}_{\leq 1} \cdot |x^2 + xy + y^2| \leq 1 \cdot (|x|^2 + |xy| + |y|^2) \leq 1 + 1 + 1 \leq 3 = L$$

$\Rightarrow$ јесте лок. Липшицова $\Rightarrow$ Пикарова Т $\Rightarrow$ $\exists_1$ реш!

$f(x)=x^3$

(*) $|tx^3-ty^3| = \underbrace{|t|}_{\text{небитно}}\cdot\boxed{|x^3-y^3|} \to$ ако је $C^1 \Rightarrow$ Лип.

$$L = \max\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$$

$$|f(x)-f(y)| \le \max\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\cdot|x-y|$$

б) t^2

$|x|^{1/2}$

$|x|$ непр. $\Rightarrow |x|^{1/2}$ непр.

$\Bigg\}\ F(x,t)=t^2\cdot|x|^{1/2}$ непр. $\Rightarrow$ Пеано $\Rightarrow \exists$реш.

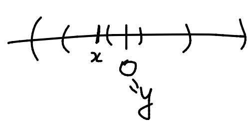
$$|F(x,t)-F(y,t)| \overset{?}{\le} L\cdot|x-y|$$

$$|F(x,t)-F(y,t)| = |t^2\sqrt{|x|}-t^2\sqrt{|y|}| = |t^2|\cdot|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}| \le \underbrace{|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}| \overset{?}{\le} L\cdot|x-y|}_{\text{доказујемо да } \nexists L\in\mathbb{R}}$$

$|t^2|$ у некој окол. 0: $|t^2|\le 1$

x,y - у некој окол. 0

$y=0 \to$ бирамо



$x\to 0$

$$|\sqrt{|x|}-\sqrt{|0|}| \le L\cdot|x-0|$$

$$\sqrt{|x|} \le L\cdot|x| \quad /:|x|$$

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \le L \quad /\lim_{x\to 0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$$

$\Bigg\} \Rightarrow +\infty \le L$ ↯

$\Rightarrow$ не задовољава Липшица!

НЕ ЗНАЧИ да решење није јединствено!

$x' = t^2\cdot\sqrt{|x|}$ $\qquad x\equiv 0$ ✓

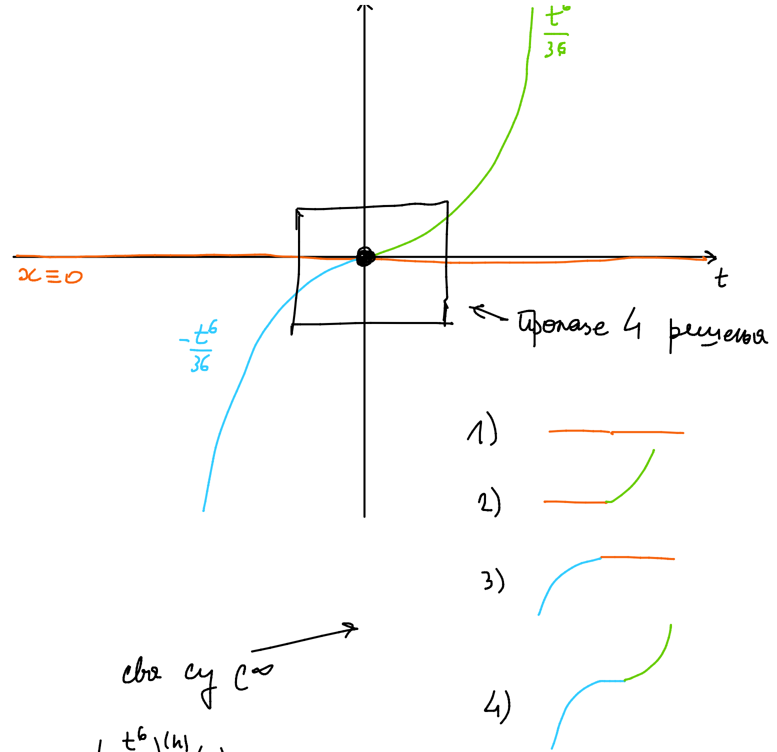
$x>0:\ \frac{x'}{\sqrt{x}} = t^2 \ /\int$

$x>0:\quad \dfrac{x'}{\sqrt{x}} = t^2 \;/\int$

$$2\sqrt{x} = \frac{t^3}{3}$$

$$x = \frac{t^6}{36}$$

$x<0:\quad \ldots \quad x = -\dfrac{t^6}{36}$



све су C^∞

$$\left(\frac{t^6}{36}\right)^{(n)}(0) = 0$$

$\Rightarrow$ није јединствено!

в) $F(x,t) = \dfrac{\ln x}{1-\operatorname{sgn} x} + t$

$$\left.\begin{array}{l} \ln x \Rightarrow \underline{x>0} \\ 1-\operatorname{sgn} x \Rightarrow \operatorname{sgn} x \neq 1 \Rightarrow \underline{x \le 0} \end{array}\right\} \lightning \quad \Rightarrow \text{нема реш.}$$