нехомогени СДЈНК: $X' = AX + g(t)$

$\hookrightarrow$ нехомогени део, $g(t) \in \mathbb{R}^n$

ОР: $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$ (*)

X_H → ОР хомогене (за своју мн. ј-ну)

X_P → ПР нехомогене

доказ (*): X_p – ПР нехомогене

$X_p' = AX_p + g(t)$

смена: $Y(t) = X(t) - X_p(t) \Rightarrow Y' = X' - X_p'$

$Y' + X_p' = A(Y + X_p) + g(t)$

$Y' = AY \Rightarrow Y = e^{At}\cdot C$

$\Rightarrow X(t) = e^{At}\cdot C + X_p(t)$

ОР хом.

лема: ПР је $X_p(t) = \underbrace{e^{tA}}_{n\times n}\cdot \int \underbrace{e^{-tA}\cdot g(t)}_{n\times 1}\,dt$

→ по компонентама

доказ: хоћемо $X_p' = AX_p + g$

$$X_p' = (e^{tA})'\cdot \int e^{-tA} g(t)\,dt + e^{tA}\cdot\left(\int e^{-tA} g(t)\,dt\right)' =$$

$$= A\boxed{e^{tA}\cdot \int e^{-tA} g(t)\,dt} + \underbrace{e^{tA}\cdot e^{-tA}}_{E}\cdot g(t) =$$

$$= AX_p + g$$

ОР: $X(t) = e^{tA}\cdot c + e^{tA}\cdot\int e^{-tA}\cdot g(t)\,dt = e^{tA}\left(c + \int e^{-tA}\cdot g(t)\,dt\right)$, $c \in \mathbb{R}^n$

напомена 1: постоји и формула за $X'(t) = A(t)X(t) + g(t)$ — уместо e^{tA} иде фундаментална матрица $\Phi(t)$

$$X_p(t) = \Phi(t)\cdot\int \Phi^{-1}(t)\,g(t)\,dt$$

напомена 2: упоредити са $x' + px = g(t)$ $(n=1)$

$$x_p(t) = e^{-pt}\cdot\int e^{pt}\cdot g(t)\,dt$$

1) а) $x_1' = x_2 + \frac{1}{\cos^2 t}$

$x_2' = -x_1 + \operatorname{tg} t$

решење: $X(t) = \begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}c + \begin{bmatrix}\operatorname{tg} t\\ 0\end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{R}^2$

б) $x_1' = x_1 + x_2 - \cos t$

$x_2' = -2x_1 - x_2 + \sin t + \cos t$

б) $X' = AX + g(t)$

$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$, $g(t) = \begin{bmatrix}-\cos t\\ \sin t + \cos t\end{bmatrix}$

$X_p(t) = e^{tA}\cdot\int e^{-tA} g(t)\,dt$

$e^{tA} = \begin{bmatrix}\cos t + \sin t & \sin t\\ \cdot & \end{bmatrix}$ → рачунати

$$X_p(t) = e^{\cdot} \cdot \int e^{-\cdot} g(t)\,dt$$

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix} \rightarrow \text{доказати}$$

$$e^{-tA} = (e^{tA})^{-1} = \frac{1}{\det}\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \ldots \quad ; \quad e^{-tA} = e^{(-t)\cdot A} = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & -\sin t \\ 2\sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}$$

$$\int e^{-tA} \cdot g(t)\,dt = \int \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & -\sin t \\ 2\sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t + \cos t \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} -\cos^2 t + \sin t\cos t - \sin^2 t - \sin t \cos t \\ -2\sin t\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 2\sin t \cos t \end{bmatrix} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} \int (-1)\,dt \\ \int (1)\,dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$$

$$X_p(t) = e^{tA} \cdot \int e^{-tA} \cdot g(t)\,dt = \begin{bmatrix} \sin t + \cos t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t\cos t \\ t(\cos t - \sin t) \end{bmatrix}.$$

ОР: $X(t) = e^{tA} \cdot C + X_p(t)$, $C \in \mathbb{R}^2$

<u>системи ↔ јне вишег реда</u>

(2) $x_1' = p x_1 - q x_2$ $\qquad p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x_2' = q x_1 + p x_2$ $(*)$ $\qquad$ 2 јне 1. реда → 1 јна 2. реда

елиминација: $\quad x_1' = p x_1 - q x_2 \Rightarrow x_2 = \dfrac{p x_1 - x_1'}{q} \quad /'$

$$x_2' = \frac{p x_1' - x_1''}{q}$$

$$\frac{p x_1' - x_1''}{q} = q x_1 + p \cdot \frac{p x_1 - x_1'}{q} \quad / \cdot q$$

доказати: решити $(*)$ и $(\#)$ и упоредити

$$x_1'' - 2p x_1' + (p^2 + q^2) x_1 = 0 \quad (\#)$$

(3) $x''' - 2x'' + x = 0$ $\qquad$ 1 јна 3. реда → 3 јне 1. реда

$x_1 = x$

$x_2 = x'$

$x_3 = x''$

$x_2 = x'$

$x_3 = x''$

$$x_1' = x' = x_2$$

$$x_2' = x'' = x_3$$

$$x_3' = x''' = 2x'' - x = 2x_3 - x_1$$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= 2x_3 - x_1 \end{aligned}\right\}$$

(4)
$$\left.\begin{aligned} x''' &= ty' - \sin t \cdot x' + t \\ y'' &= x'' - \cos(x' \cdot y) \end{aligned}\right\}$$

3. реда + 2. реда = 5 јна 1. реда

$x_1 = x$

$x_2 = x'$

$x_3 = x''$

$y_1 = y$

$y_2 = y'$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x' = x_2 \\ x_2' &= x'' = x_3 \\ x_3' &= x''' = t\underbrace{y'}_{y_2} - \sin t \cdot \underbrace{x'}_{x_2} + t = ty_2 - \sin t \cdot x_2 + t \\ y_1' &= y' = y_2 \\ y_2' &= y'' = \underbrace{x''}_{x_3} - \cos(\underbrace{x'}_{x_2} \cdot \underbrace{y}_{y_1}) = x_3 - \cos(x_2 \cdot y_1) \end{aligned}\right\}$$

ЛЈВРКК (лин. јна вишег реда са КК)

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\, x^{(n-2)} + \ldots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = f(t)$$ → лин. јна ВР

$a_{n-1}(t), \ldots, a_0(t)$ – константе, онда је ЛЈВРКК

$f \neq 0$ – нехомогена

$f = 0$ – хомогена

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = f(t)$$

ОР: $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

ОР хомогене

ПР нехомогене

$(f = 0,\ x_p = 0)$

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$ (карактеристична јна)

$\Rightarrow$ n нула (у $\mathbb{C}$)

→ Како изгледа база ВП решења x_H? (ВП дим $= n$)

1) $\mu \in \mathbb{R}$ које је нула реда k:

у бази елементи $e^{\mu t}, te^{\mu t}, \dots, t^{k-1}e^{\mu t}$ $\quad (k)$

2) $\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ је нула реда k:

у бази елементи $e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$ $\quad (2k)$

5 (хомогене)

а) $x''' - 13x' - 12x = 0 \xrightarrow{\text{кар. јна}} \lambda^3 - 13\lambda - 12 = 0$

$\lambda = 1$ x

$\lambda = -1$ ✓

$\lambda^3 - 13\lambda - 12 = (\lambda+1)(\dots)$, $\quad (\dots) = \lambda^2 - \lambda - 12 = (\lambda+3)(\lambda-4)$

$\lambda_1 = -1 \rightsquigarrow e^{-t}$

$\lambda_2 = -3 \rightsquigarrow e^{-3t}$

$\lambda_3 = 4 \rightsquigarrow e^{4t}$

ОР: $x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t} + c_3e^{4t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

б) $x''' - 7x'' + 16x' - 12x = 0$

↓ кар. јна

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$

$\lambda = 1$

$\lambda = -1$

$\lambda = 2$ ✓

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda-2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$, $\quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \rightsquigarrow e^{2t}, te^{2t}$

$\lambda_3 = 3 \rightsquigarrow e^{3t}$

ОР: $x(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3e^{3t}, \quad c_i \in \mathbb{R}$

в) $x''' - 3x'' + 9x' + 13x = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$

$\lambda_1 = -1 \rightsquigarrow e^{-t}$

↓

$(\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$

↳ $D = 16 - 4\cdot 13 = 16 - 52 = -36$

$\Rightarrow \lambda_{2/3} = \frac{4 \pm i\cdot 6}{2} = 2 \pm 3i \rightsquigarrow e^{2t}\cos 3t, e^{2t}\sin 3t$

ОР: $x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}\cos 3t + c_3e^{2t}\sin 3t, \quad c_i \in \mathbb{R}$

г) $x^{(6)} - 4x^{(5)} + 8x^{(4)} - 8x''' + 4x'' = 0$

$\lambda^6 - 4\lambda^5 + 8\lambda^4 - 8\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0$

г) $x^{(6)} - 4x^{(5)} + 8x^{(4)} - 8x''' + 4x'' = 0$

$$\lambda^6 - 4\lambda^5 + 8\lambda^4 - 8\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 \underbrace{(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4)}_{\parallel} = 0 \rightarrow \text{деNује} \quad \text{ga нема } \mathbb{R} \text{ нула}$$

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)(\lambda^2 + c\lambda + d)$$

$\lambda^3: \; a + c = -4$

$\lambda^2: \; b + d + ac = 8$

$\lambda: \; ad + bc = -8$

$1: \; bd = 4$

пробамо: $b = d = 2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a + c = -4 \\ ac = 4 \end{matrix}\right\} a = c = -2$

$$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_{3/4} = \lambda_{5/6} = 1 \pm i$

$e^{0t}, te^{0t} \qquad e^t\cos t, e^t\sin t$

$\;\; 1 \qquad\; t \qquad\quad te^t\cos t, te^t\sin t$

ОР: $x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t \cos t + c_4 e^t \sin t + c_5 t e^t \cos t + c_6 t e^t \sin t, \; c_i \in \mathbb{R}$