Шта је ДЈ? $f(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \rightsquigarrow x(t) = ?$

пр. $(t + x'')^2 - x' = 0 \to$ 2. реда

$x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$

ред ДЈ = ред највећег извода који се у њој појављује

ОДЈ – обичне ДЈ $x(t) \rightsquigarrow x', \dots, x^{(n)}$ ←

ПДЈ – парцијалне $u(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$

$x'(t) = x' = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = \dot{x}$

$x(t), y(x)$

(1) Решити ДЈ: $x' = t + \sin t \; / \int$

↓ наћи сва решења → обично има ∞ много

$x(t) = \frac{t^2}{2} - \cos t + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диф.

$\int_0^x f(t)\,dt = f(x) \; /'$

$f(x) = f'(x) \underset{\text{касније}}{\rightsquigarrow} f(x) = c \cdot e^x, \quad c \in \mathbb{R}$

провера: $\int_0^x c e^t\,dt = c \cdot e^x$

$ce^t\big|_0^x = ce^x$

$c(e^x - 1) = ce^x \Rightarrow c = 1$

$f \equiv 0$ једино.

АН1: $f' - f = 0 \; / \cdot e^{-x}$

$f'e^{-x} - fe^{-x} = 0$

$(fe^{-x})' = 0$

$fe^{-x} = c$

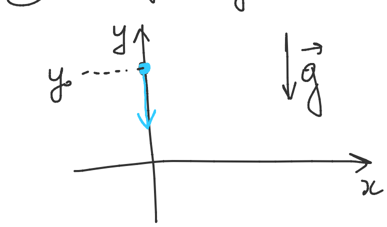
опште решење (ОР): облик који описује сва решења ДЈ

партикуларно решење (ПР): једно решење ДЈ

$f(x) = c \cdot e^x, \; c \in \mathbb{R}$

$f(x) = 3 \cdot e^x, \; f(x) \equiv 0$

(3) Слободан пад



$x(t)$ положај

$\dot{x}(t) = v(t)$ брзина

$\ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = a(t)$ убрзање

једначине кретања $X(t) = (x(t), y(t))$, $\vec{g} = (0, -g)$

$\ddot{X} = \vec{g}$ → систем ДЈ

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{x} = 0\\ \ddot{y} = -g\end{array}\right\}$$

почетни услови: $x(0)=0$ $\quad \dot{x}(0)=0$

$y(0)=y_0 \quad \dot{y}(0)=0$

$\ddot{x}=0 \Rightarrow x(t)=c_1t+c_2$

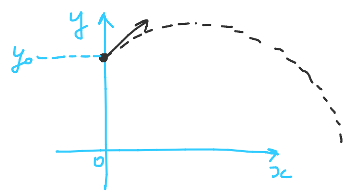
$\ddot{y}=-g \Rightarrow \dot{y}(t)=-gt+c_3 \Rightarrow y(t)=-\frac{gt^2}{2}+c_3t+c_4$ $\qquad c_i\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}c_2=0\\ c_1=0\\ c_4=y_0\\ c_3=0\end{array}\right\} \Rightarrow X(t)=\begin{bmatrix}0\\ y_0-\frac{gt^2}{2}\end{bmatrix}$$

додатак: Коси хитац $\quad \ddot{X}=\vec{g}$

$x(0)=0 \qquad \dot{x}(0)=v_x$

$y(0)=y_0 \qquad \dot{y}(0)=v_y$



Кошијев проблем: $\begin{cases}x'=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ ← почетни услов (Кошијев)

n-тог реда: $x^{(n)}=f(t,\dots,x^{(n-1)})$

$$n\begin{cases}x(t_0)=x_0\\ x'(t_0)=x_1\\ \vdots\\ x^{(n-1)}(t_0)=x_{n-1}\end{cases}$$

пр. зад 3

(4) $x'=k\cdot x\,,\ k\neq 0$

$\frac{x'}{x}=k$ ↙ $x\neq 0$

$(\ln|x|)'=k \ /\int$

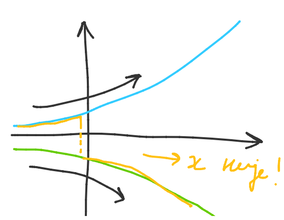
$\left[(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|}\cdot(|x|)'=\frac{\operatorname{sgn}x}{|x|}=\frac{\operatorname{sgn}x}{x\cdot\operatorname{sgn}x}=\frac{1}{x}\right]$, $x\neq 0$

$e^{\square}\backslash\ \ln|x|=kt+c\,,\ c\in\mathbb{R}$

$|x|=e^{kt+c}=e^c\cdot e^{kt}=c_1\cdot e^{kt}\,,\ c_1>0$

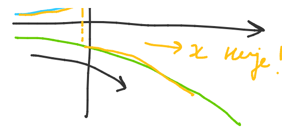
$x=c_2\cdot e^{kt}\,,\quad c_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x\equiv 0$? ✓

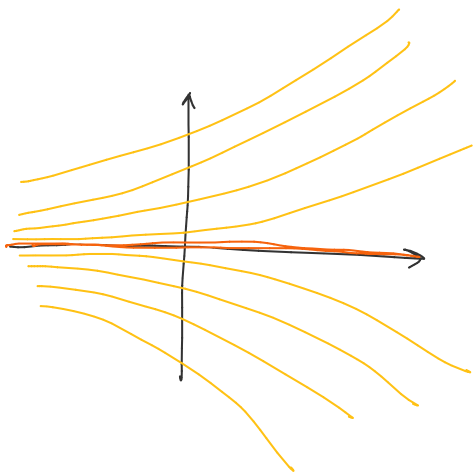


x диф ⇒ x неп

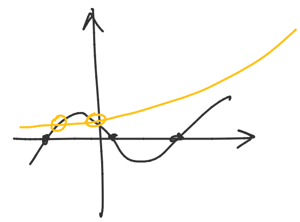
$x\equiv 0$? ✓



ОР: $x(t)=c_3\cdot e^{kt}$, $c_3\in\mathbb{R}$

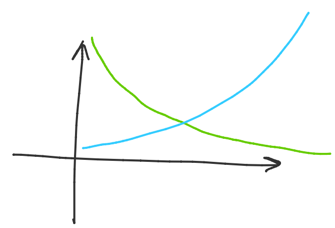


Пикарова Т (касније): за довољно лепе ДЈ, решења се не секу



$k<0$ – радиоактивни распад

$k>0$ – експоненцијални раст



Типови ДЈ:

$\boxed{0}$ Раздвајање променљивих

$x'(t)=\frac{f(t)}{g(x)}$, $f\in C(a,b)$, $g\in C(c,d)$, $g\neq 0$

ОР: $\int_{x_0}^{x} g(u)\,du = \int_{t_0}^{t} f(v)\,dv$ $\left(\int g(x)\,dx=\int f(t)\,dt\right)$

Интуитивно:

$x'=\frac{dx}{dt}=\frac{f(t)}{g(x)} \Rightarrow g(x)\,dx=f(t)\,dt \;/\int$

(5) $tx'=x$, ОР и ПР тд. $x(-3)=\frac{1}{3}$.

$\frac{x'}{x}=\frac{1}{t} \;/\int \Rightarrow \ln|x|=\ln|t|+c,\ c\in\mathbb{R} \Rightarrow |x|=c_1\cdot|t|$, $c_1=e^c>0$

$x=c_2\cdot t$, $c_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x=0$ ✓

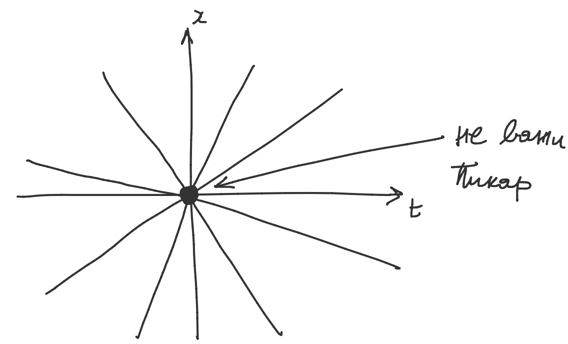
$\left(x'=\frac{dx}{dt} \rightsquigarrow \frac{dx}{x}=\frac{dt}{t} \;/\int\right)$

ОР: $x=c_3 t$, $c_3\in\mathbb{R}$

ПР: $t=-3$, $x=\frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{3}=c_3\cdot(-3) \Rightarrow c_3=-\frac{1}{9}$

ПР: $t=-3$
$x=\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{1}{3}=c_3\cdot(-3) \Rightarrow c_3=-\frac{1}{9}$

ПР: $x(t)=-\frac{t}{9}$.



$t=0$: $\quad 0\cdot x'(0)=x(0) \Rightarrow$ сва пролазе кроз $(0,0)$

⑥ $x'=\frac{2xt}{t^2-1}$. Решити ДЈ, скицирати решења, наћи ПР
↳ интегралне криве

а) $x(0)=1$

б) $x(2)=1$

$$\frac{x'}{x}=\frac{2t}{t^2-1} \quad \Big/\int \Rightarrow \ln|x|=\ln|t^2-1|+c, \; c\in\mathbb{R}$$

$$|x|=c_1|t^2-1|, \quad c_1>0$$

$$x=c_2(t^2-1), \quad c_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$x=0 \checkmark$$

ОР: $x=c_3(t^2-1)$, $c_3\in\mathbb{R}$

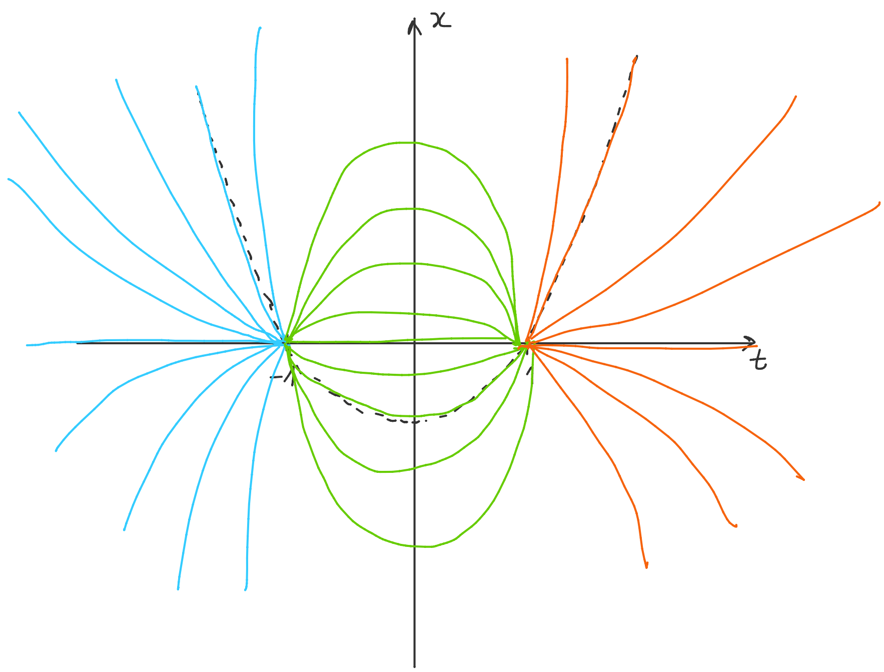
$t\neq\pm1$

ДЈ решавамо на интервалима!

1° $t\in(-\infty,-1)$

2° $t\in(-1,1)$

3° $t\in(1,+\infty)$



а) $x(0)=1 \to 0\in(-1,1)$

$1=c_3(0^2-1) \Rightarrow c_3=-1$

$x=1-t^2,\ t\in(-1,1)$

б) $x(2)=1 \leadsto 2\in(1,\infty)$

$1=c_3(2^2-1) \Rightarrow c_3=\frac{1}{3}$

$x=\frac{t^2-1}{3},\ t>1$

домаћи: $x'=kx^2,\ k>0$

једначина експлозије

На ком интервалу је деф. решење?

(7) Наћи све C^1 ф-је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ тд. $f(0)=1$ и површина испод графика од 0 до x_0 ф-је f је једнака дужини лука од 0 до x_0 од f, $\forall x_0>0$

$$\int_0^{x_0} f(t)\,dt = \int_0^{x_0}\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt \quad \Big/'_{x_0}$$

$$f(x_0)=\sqrt{1+(f'(x_0))^2} \quad \Big/^2 \quad \Rightarrow f\geq 1$$

$f^2=1+f'^2$

$f'^2=f^2-1$

$\Rightarrow f'=\sqrt{f^2-1}$

ако $f'<0$, $f(0)=1 \Rightarrow f<1$ ↯

зато $+\sqrt{\ }$

$$\frac{f'}{\sqrt{f^2-1}}=1 \quad \Big/\int$$

$\vdots$

$f\equiv 1$?

$\boxed{1}$ $x'=f(\alpha t+\beta x+\gamma)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \gamma\in\mathbb{R}$, $f\in C(a,b)$

смена: $x(t)\leadsto y(t)$

$$\left.\begin{aligned} &y(t)=\alpha t+\beta x(t)+\gamma \quad \Big/'_t \\ &y'=\alpha+\beta x' \Rightarrow x'=\frac{y'-\alpha}{\beta}\end{aligned}\right\} \leadsto \text{РП}$$

(8) а) $x'=x+2t-3$

б) $x'=(x+t)^2$

б) $f(z)=z^2$ $\qquad x+t \leadsto \alpha=\beta=1,\ \gamma=0$

$y=x+t$

$y'=x'+1 \Rightarrow x'=y'-1$

$y = x + t$

$y' = x' + 1 \Rightarrow x' = y' - 1$

$y' - 1 = y^2 \quad \not\rightsquigarrow \quad \frac{y'-1}{y^2} = 1$

$y' = y^2 + 1$

$\frac{y'}{y^2+1} = 1 \quad \Big/ \int$ РП

$\operatorname{arctg} y = t + c, \quad c \in \mathbb{R}$

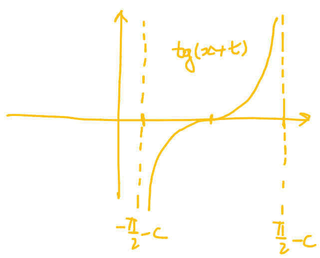
$y = \operatorname{tg}(t+c)$

$x + t = \operatorname{tg}(t+c)$

ОР. $x = \operatorname{tg}(t+c) - t, \quad c \in \mathbb{R}$

НАП. $\operatorname{arctg} y = t + c \Rightarrow t + c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$-\frac{\pi}{2} - c < t < \frac{\pi}{2} - c$



∞ реш, али свако је деф. на разл. интервалу