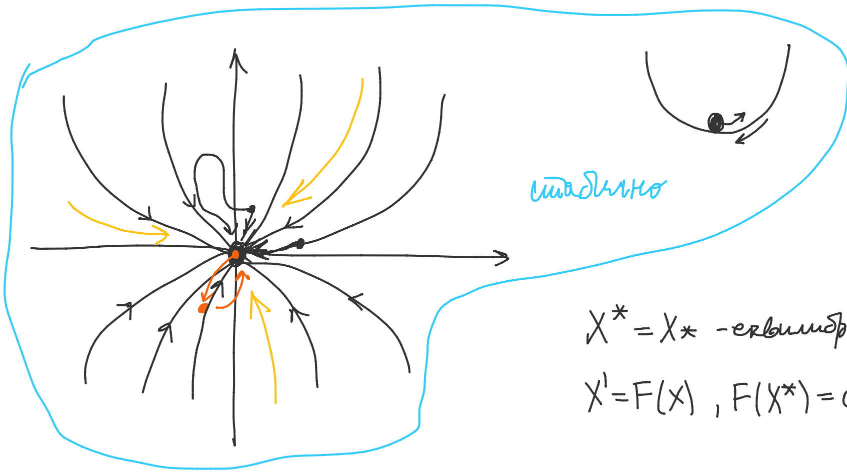
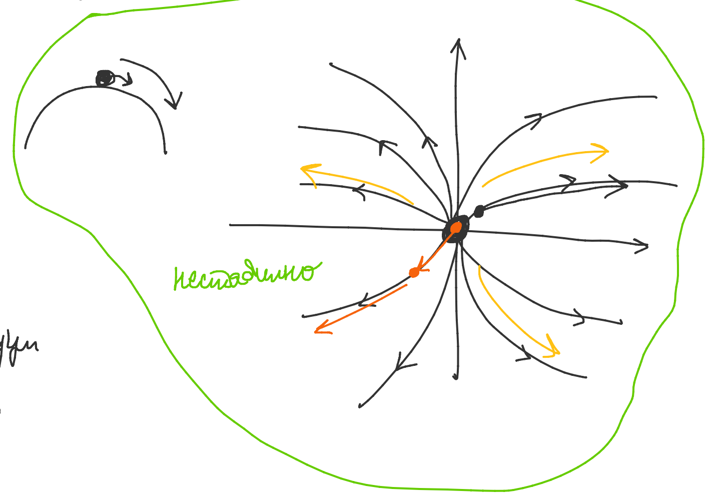
Стабилност еквилибријума ДС (по Љапунову)





$X^* = X_*$ - еквилибријуми

$X' = F(X)$, $F(X^*) = 0$

Деф. Еквилибријум X^* је:

1) стабилан , ако $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall X(t)$ решење , $X(t_0)=X_0)$ $\|X_0 - X^*\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X^*\| < \varepsilon$, $\forall t \geq T$

2) нестабилан, ако није стабилан

3) асимптотски стабилан , ако је стабилан и $(\exists \delta > 0)\ \|X_0 - X^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} X(t) = X^*$.

1. Скицирати фазне портрете динамичких система, а затим испитати стабилност њихових еквилибријума:

а) $x_1' = -x_1 + 2x_2$, $x_2' = -3x_2$

б) $x_1' = -x_1 + 3x_2$, $x_2' = 5x_1 - 3x_2$

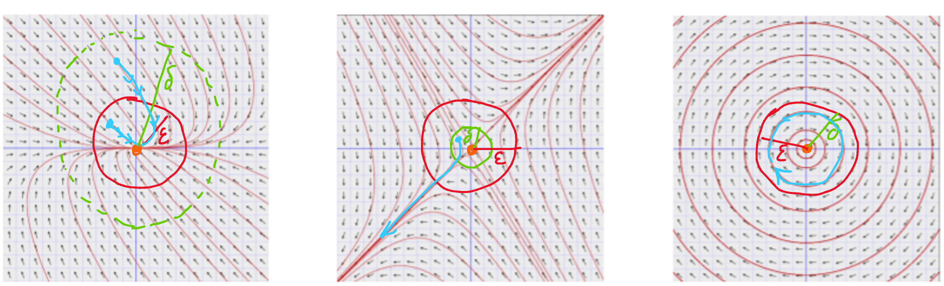
в) $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$.

$X^* = (0,0)$ у сва три

а) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3 \rightarrow$ стабилан чвор

б) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -6 \rightarrow$ седло

в) $\lambda_{1/2} = \pm i \rightarrow$ центар



а) стабилан , да ли је АС? Јесте , јер свако решење завршава у (0,0).

доказати , решити систем и изр. $\lim_{t\to\infty} X(t)$, $X(0) = X_0$.

б) $\varepsilon = 1$, колико год мало δ , $\exists$ решење које почиње δ-близу X^* и одлази ван ε-околине

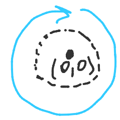
нестабилан

нестабилан

домаћи: доказати алгебарски (нпр. $X(0)=\begin{bmatrix}\delta/2\\0\end{bmatrix}\in B(X^*;\delta)$).

в) $\delta=\varepsilon$ у деф. стаб. $\|X(t)\|=\|X_0\| \Rightarrow \|X_0\|<\delta \Rightarrow \|X(t)\|<\varepsilon \rightarrow$ стабилан

АС? X_0 - фикс $\lim_{t\to\infty} X(t)=(0,0)$? није!



$\boxed{\text{T}}$ (Прва Т Љапунова, метод сопс. вр.)

$X'=F(X)$, $A=dF(X^*)$

1) Свака сопс. вр. λ од A има $Re(\lambda)<0 \Rightarrow X^*$ асимптотски стабилан

2) Ако $\exists\lambda$ сопс. вр. од A тд. $Re(\lambda)>0 \Rightarrow X^*$ нестабилан

$$F(X)=F(X^*)+\underbrace{dF(X^*)\cdot(X-X^*)}_{\text{апроксимација}}+o(X-X^*)$$

$X'=F(X) \rightsquigarrow X'=AX$, $A=dF(X^*)$

$F=(F_1,\dots,F_n)$

$X=(x_1,\dots,x_n)$

$$dF(X^*)=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(X^*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(X^*)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(X^*) & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X^*)\end{bmatrix}$$

2. Испитати стабилност еквилибријума из задатка 1 помоћу теореме Љапунова о сопственим вредностима.

$X'=AX$, $F(X)=A\cdot X$, $dF(X)=A \Rightarrow dF(X^*)=A$

а) $\lambda_1=-1, \lambda_2=-3 \rightarrow Re(\lambda_1)<0$ и $Re(\lambda_2)<0 \Rightarrow X^*$ АС

б) $\lambda_1=2, \lambda_2=-6 \rightarrow Re(\lambda_1)>0$ и $Re(\lambda_2)<0 \Rightarrow X^*$ нестабилан

в) $\lambda_{1/2}=\pm i \rightarrow Re(\lambda_1)=Re(\lambda_2)=0 \Rightarrow$ из Т не можемо ништа закључити

3. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$x_1'=e^{x_1}-e^{-3x_3}$$
$$x_2'=4x_3-3\sin(x_1+x_2)$$
$$x_3'=\ln(1-3x_1+x_3),$$

а затим испитати стабилност еквилибријума $X^*=(0,0,0)$.

$X'=0 \Rightarrow e^{x_1}-e^{-3x_3}=0 \rightsquigarrow e^{x_1}=e^{-3x_3} \xrightarrow{1-1} x_1=-3x_3$

$4x_3-3\sin(x_1+x_2)=0$

$$X' = 0 \Rightarrow e^{x_1} - e^{-3x_3} = 0 \rightsquigarrow e^{x_1} = e^{-3x_3} \xrightarrow{1-1} x_1 = -3x_3$$

$$4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) = 0$$

$$\ln(1 - 3x_1 + x_3) = 0 \rightsquigarrow 1 - 3x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 3x_1$$

$$x_1 = -3x_3 = -3 \cdot 3x_1 = -9x_1 \Rightarrow x_1 = x_3 = 0$$

$$4 \cdot 0 - 3 \cdot \sin(0 + x_2) = 0 \Rightarrow \sin x_2 = 0 \Rightarrow x_2 \in \mathbb{Z}\pi$$

$$X^* \in \{(0, k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$X^* = (0,0,0)$:

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} - e^{-3x_3}$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2)$$

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = \ln(1 - 3x_1 + x_3)$$

$$A = dF(X^*), \qquad \underset{(x_1,x_2,x_3)}{dF(X)} = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & 3e^{-3x_3} \\ -3\cos(x_1+x_2) & -3\cos(x_1+x_2) & 4 \\ \dfrac{-3}{1-3x_1+x_3} & 0 & \dfrac{1}{1-3x_1+x_3} \end{bmatrix}$$

$$A = dF(X^*) = dF(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = -3, \ \lambda_{2/3} = 1 \pm 3i$$

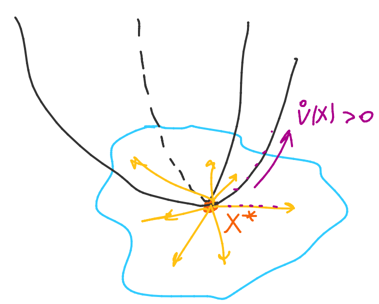
$$\mathrm{Re}(\lambda_1) = -3$$

$$\underline{\mathrm{Re}(\lambda_{2/3}) = 1} > 0$$

$\Rightarrow X^*(0,0,0)$ је нестабилан

$\boxed{T}$ Нека је X^* еквилибријум система $X' = F(X)$. У некој околини $U \ni X^*$ постоји ф-ја $V: U \to \mathbb{R}$ т.д.

1) $V \in C^1(U)$
2) $V(X^*) = 0$ и $V(X) > 0$, $\forall X \in U \setminus \{X^*\}$ (позитивно дефинитна)
3) Важи једна од следећих ствари:
   - $\mathring{V}(X) \leq 0$, $\forall X \in U \setminus \{X^*\} \Rightarrow X^*$ стабилан
   - $\mathring{V}(X) < 0$, $\forall X \in U \setminus \{X^*\} \Rightarrow X^*$ AC
   - $\mathring{V}(X) > 0$, $\forall X \in U \setminus \{X^*\} \Rightarrow X^*$ нестабилан



$\mathring{V}(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle = \nabla V(X) \circ F(X) \to$ извод V дуж трајекторије

V – функција Љапунова

често: $V(X) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2$
$a_1, \ldots, a_n > 0$

4. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$x_1' = (x_3+1)(2x_2 - x_1)$$
$$x_2' = -(x_3+1)(x_1+x_2)$$
$$x_3' = -x_3^3,$$

а затим испитати њихову стабилност.

$$\left.\begin{array}{l}(x_3+1)(2x_2-x_1)=0\\ -(x_3+1)(x_1+x_2)=0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}2x_2-x_1=0\\ x_1+x_2=0\end{array}\right\} x_1=x_2=0$$

$$-x_3^3=0 \longrightarrow x_3=0$$

$$X^* = (0,0,0)$$

домаћи: методом сопс. вр. не добијамо одговор

$$V(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2 \quad , a,b,c>0$$

1) $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ✓

2) $V(0,0,0)=0 \quad , V(X)>0 \quad , \forall X \neq (0,0,0)$

3) $\dot V(X) = \langle \nabla V(X), F(X)\rangle = \langle (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3), ((x_3+1)(2x_2-x_1), -(x_3+1)(x_1+x_2), -x_3^3)\rangle =$

$$= (x_3+1)(4ax_1x_2 - 2ax_1^2 - 2bx_1x_2 - 2bx_2^2) - 2cx_3^4 =$$

$$\nabla V = (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3)$$

$$= \underbrace{(x_3+1)}_{\downarrow}\big(\underbrace{-2ax_1^2-2bx_2^2}_{<0}+\underbrace{x_1x_2(4a-2b)}_{=0}\big)\underbrace{-2cx_3^4}_{<0}$$

хоћемо околину тд. >0 од X^*

Узмемо $U = B(X^*; \frac{1}{2})$, тд $x_3+1>0$

$$4a=2b \Rightarrow b=2a$$

$a=1, b=2, c=1$:

$$\dot V(X) = \underbrace{(x_3+1)}_{>0}(-2x_1^2-4x_2^2)-2x_3^4 < 0 \quad , \text{за } X\neq X^*$$

$$\Rightarrow X^* \text{ је АС}$$

5. Доказати да је координатни почетак стабилан, али не и асимптотски стабилан еквилибријум система
1) $X' = AX$, где је $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0,0)$ система:

а) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_1x_2^2 \\ -x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ б) $X' = AX + \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 \\ x_2^3 + x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ в) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$ 2)

3) Показати да је у сва три случаја матрица $dF(\mathbf{0})$ једнака и да метод сопствених вредности не даје одговор.

1), 3) – домаћи

1) погледати (13) 3) добија се $dF(0) = A$

2) а) $X' = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2 \\ x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix} \swarrow F(X)$

2) а) $X' = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2 \\ x_1 - x_2^3 - x_1^2 x_2 \end{bmatrix} \leftarrow F(X)$

$V(x_1,x_2) = a x_1^2 + b x_2^2 \quad , a,b>0$

$V \in C^1$ и V је поз.деф. ✓

$\dot V(X) = \langle (2a x_1, 2b x_2), F(X) \rangle = -2a x_1 x_2 - 2a x_1^4 - 2a x_1^2 x_2^2 + 2b x_1 x_2 - 2b x_2^4 - 2b x_1^2 x_2^2 =$

$= \underset{<0}{-2a x_1^4} \underset{<0}{-2b x_2^4} \underset{<0}{-2(a+b) x_1^2 x_2^2} + \underbrace{x_1 x_2 (2b - 2a)}_{=0}$

нпр. $a=b=1$: $\quad V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$\dot V(X) = -2x_1^4 - 2x_2^4 - 4x_1^2 x_2^2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0 \quad , \forall X \neq X^*$

$\Rightarrow X^*$ је АС

б) $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$\dot V(X) = \_\_\_ = 2(x_1^2 + x_2^2)^2 > 0 \quad , \forall X \neq X^* \quad \Rightarrow X^*$ је нестабилан

в) $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$\dot V(X) = \ldots = 0 \Rightarrow X^*$ је стабилан

6. Испитати стабилност положаја равнотеже $X^* = (0,0)$ динамичког система

$$x_1' = -\sin x_2$$
$$x_2' = x_1.$$

$V = ? \qquad F(x_1,x_2) = (-\sin x_2, x_1)$

$\dot V(X) = \langle \nabla V, F \rangle \overset{?}{=} 0$ → довољно!

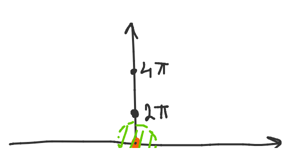
$\nabla V = (x_1, \sin x_2) \rightsquigarrow V = ? \to V$ је поз. деф.

$\left.\begin{array}{l} V(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{2} - \cos x_2 + c \\ V(0,0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c = 1$

$V(x_1,x_2) = \underbrace{\frac{x_1^2}{2}}_{>0} + \underbrace{1 - \cos x_2}_{\geq 0}$

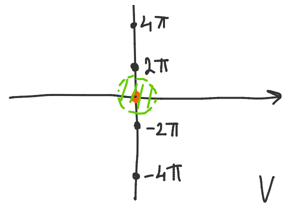
$\cos x_2 = 1$

$\Rightarrow x_2 = 2k\pi$



$U = B(X^*; 2\pi)$, на U важи $V(X) > 0$, $X \neq X^*$

$\Rightarrow x_2 = 2k\pi$



$U = B(X^*; 2\pi)$, на U важи $V(X) > 0$, $X \neq X^*$

V је ф-ја Љапунова, $\mathring{V}(X) = 0 \leq 0 \Rightarrow X^*$ је стабилан