① $A \in M_2(\mathbb{R})$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad\qquad y' = B^{-1}ABy + D(x)$

$e^{xA} = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ -3e^x + 3e^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix}$

а) $D(x) \equiv 0$, решити га

б) Одредити $B^{-1}AB$.

в) $D(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^x \end{bmatrix}$, решити га.

а) $y' = \underbrace{B^{-1}AB}_{C}y$, $y' = Cy$

ОР: $y(x) = e^{xC} \cdot K = e^{x(B^{-1}AB)} \cdot K = B^{-1}e^{xA}B \cdot K = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ -3e^x + 3e^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot K,\ K \in \mathbb{R}^2$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$e^{xC} = \begin{bmatrix} 7e^x - 6e^{2x} & 14e^x - 14e^{2x} \\ -3e^x + 3e^{2x} & -6e^x + 7e^{2x} \end{bmatrix}$

б) $C = ?$

$e^{xC} \rightsquigarrow C$?

$\Phi(x)$ – фунд. матрица система $y' = Ay$, важи $\Phi'(x) = A\Phi(x)$, $W(x) \neq 0$

$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \varphi_1' & \dots & \varphi_n' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \end{bmatrix} \rightsquigarrow \varphi_k' = A\varphi_k,\ \forall k$

за ЛСДЈКК e^{xA} је једна фунд. матр.:

1) $\Phi'(x) = (e^{xA})' = Ae^{xA} = A\Phi(x)$

2) $W(x) = \det \Phi(x) = \det(e^{xA}) = e^{tr(xA)} \neq 0$

$\Phi(x) = e^{xC}$ је фунд. матр. за $y' = Cy$

$\Phi'(x) = C \cdot \Phi(x) \quad / \cdot \Phi^{-1}(x) \qquad (W(x) \neq 0)$

$C = \Phi'(x) \cdot \Phi^{-1}(x)$

$\Phi(x) = e^{xC} = \begin{bmatrix} 7e^x - 6e^{2x} & 14e^x - 14e^{2x} \\ -3e^x + 3e^{2x} & -6e^x + 7e^{2x} \end{bmatrix}$

$$\Phi'(x) = \begin{bmatrix} 7e^{x}-12e^{2x} & 14e^{x}-28e^{2x} \\ -3e^{x}+6e^{2x} & -6e^{x}+14e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(x) = \left(e^{xC}\right)^{-1} \underset{\text{за вежбу}}{=} e^{-xC} = \Phi(-x) = \begin{bmatrix} 7e^{-x}-6e^{-2x} & 14e^{-x}-14e^{-2x} \\ -3e^{-x}+3e^{-2x} & -6e^{-x}+7e^{-2x} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}AB = C = \ldots = \begin{bmatrix} -5 & -14 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

в) $y(x) = \Phi(x) \cdot \left(C + \int \Phi^{-1}(x) \cdot D(x)\, dx \right)$

добија се: $y(x) = \Phi(x) \cdot C + \begin{bmatrix} -4 + e^{x}(14x+14) \\ \frac{3}{2} + e^{x}(-6x-7) \end{bmatrix}$.

(2) Решити систем: $x^2 yy' = \frac{y^2}{2} + e^{2z} \quad / \cdot 2$

$2x^2 z' = -3\frac{y^2}{e^{2z}} - 4 \quad / \cdot e^{2z} \Rightarrow 2x^2 e^{2z} \cdot z' = -3y^2 - 4e^{2z}$

$y_1 = y^2 \rightsquigarrow y_1' = 2yy'$

$z_1 = e^{2z} \rightsquigarrow z_1' = 2e^{2z} \cdot z'$

$x^2 y_1' = y_1 + 2z_1$

$x^2 z_1' = -3y_1 - 4z_1$

$\begin{matrix} y_1(x) \\ z_1(x) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} y_1(t) \\ z_1(t) \end{matrix}$

$z_{1t}' = \frac{dz_1}{dt} = x^2 \cdot z_1' = x^2 \cdot \frac{dz_1}{dx} = x^2 \cdot \frac{dz_1}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2} \rightsquigarrow t = -\frac{1}{x}$

$y_{1t}' = y_1 + 2z_1$

$z_{1t}' = -3y_1 - 4z_1$

$\vdots$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot c, \quad \underset{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}{c} \in \mathbb{R}^2$$

$y_1(t) = c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \rightsquigarrow y_1(x) = c_1 e^{1/x} - 2c_2 e^{2/x}$

$y(x) = \pm \sqrt{c_1 e^{1/x} - 2c_2 e^{2/x}}$ итд.

Фазни портрети

$y(x) \rightsquigarrow X(t)$

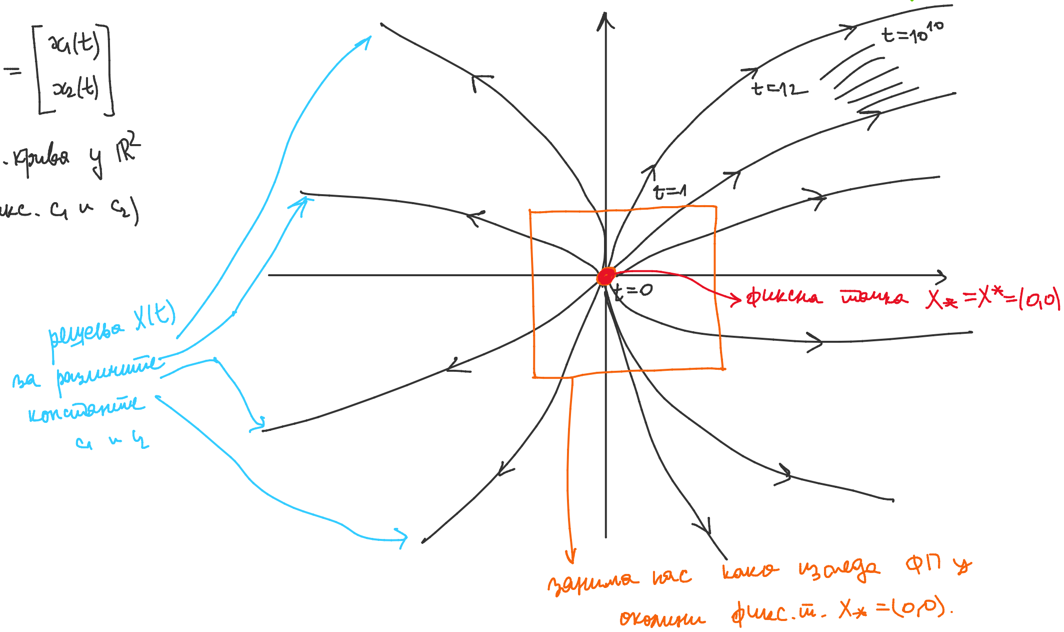
$X' = AX$ → динамички систем

t – време

решења: $X(t) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

↙ парамет. крива у $\mathbb{R}^2$ (за фикс. c_1 и c_2)



фиксна тачка = еквилибријум $\quad X' = 0$.

$X' = F(X) \rightsquigarrow F(X_*) = 0$

ЛСДЈКК: $\underline{AX_* = 0} \Rightarrow$ реш. је вект. пр. од $\mathbb{R}^2$:
- тачка $(0,0)$ $\quad (\dim = 0)$
- права кроз $(0,0)$ $\quad (\dim = 1)$
- цело $\mathbb{R}^2$ $\quad (\dim = 2)$

1. Скицирати фазни портрет динамичког система $X' = AX$, ако је:

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

г) $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; д) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; ђ) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -3$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= \quad\ -3x_2 \end{aligned}\right\} \ x_1' = x_2' = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -3x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \ x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow X^* = (0,0).$$

$\underline{\lambda_1 = -1}$ $\quad (A+E)\gamma_1 = 0 \rightsquigarrow \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = -3}$ $\quad (A+3E)\gamma_2 = 0 \rightsquigarrow \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

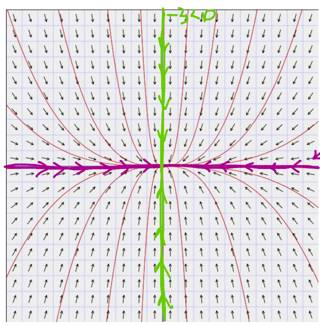
$\underline{\lambda_1=-1}$ $\quad (A+E)\gamma_1=0$
$\quad \leadsto \gamma_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

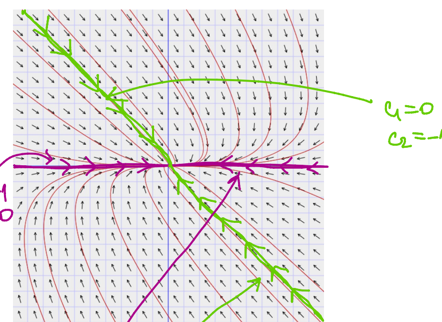
$\underline{\lambda_2=-3}$ $\quad (A+3E)\gamma_2=0$
$\quad \leadsto \gamma_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$$x(t)=c_1e^{-t}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2e^{-3t}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\quad , c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

λ_1,λ_2 – негативне и различите $\to$ стабилан чвор

$J=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-3\end{bmatrix}$ $\qquad A=\begin{bmatrix}-1&2\\0&-3\end{bmatrix}$

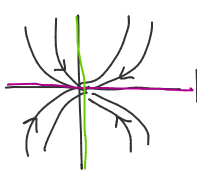




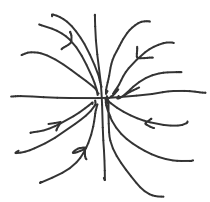
$c_1=0:$ $\quad x(t)=\begin{bmatrix}e^{-3t}\\-e^{-3t}\end{bmatrix}\Rightarrow x_2=-x_1<0$ $\quad$ ова полуправа
$(c_2=1)$

ова ФТ!

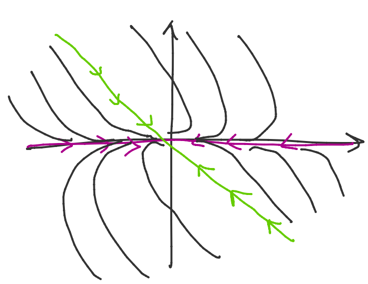
$c_2=0:$ $\quad x(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\0\end{bmatrix}\Rightarrow x_2=0$
$(c_1=1)$ $\quad x_1>0$



$|\lambda_1|<|\lambda_2|$ $\quad$ v

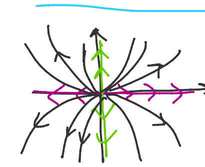


$|\lambda_2|<|\lambda_1|$



$\lambda_2\neq\lambda_1,\ \lambda_1>0,\ \lambda_2>0$

нестабилни чвор



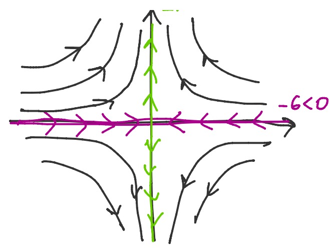
б) $A=\begin{bmatrix}-1&3\\5&-3\end{bmatrix}$, $X^*=(0,0)$

$\lambda_1=-6$, $\lambda_2=2$

седло

sella

$$J = \begin{bmatrix} -6 & \\ & 2 \end{bmatrix}$$



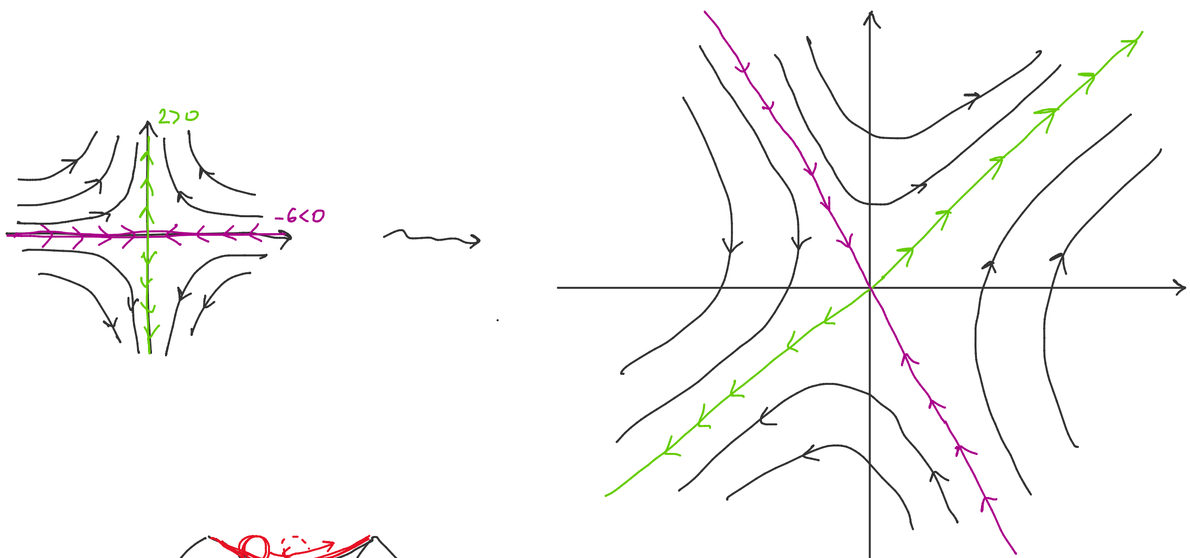
$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

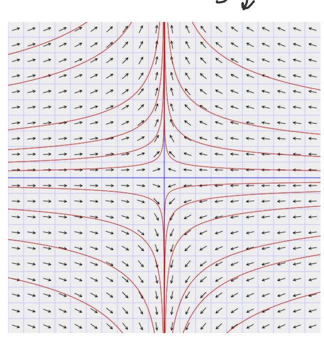
$$X(t) = c_1 e^{-6t} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$c_1 = 0$, $c_2 = 1$: $\quad X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \quad x_1 = x_2 > 0$

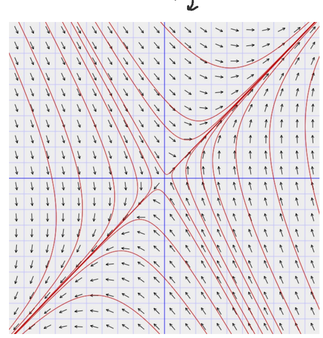
$c_2 = 0$, $c_1 = 1$: $\quad X(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-6t} \\ -5e^{-6t} \end{bmatrix} \quad 5x_1 + 3x_2 = 0$, $x_1 > 0$



J_J



A_J



В) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow \lambda_{1/2} = \pm i = \alpha \pm i\beta$

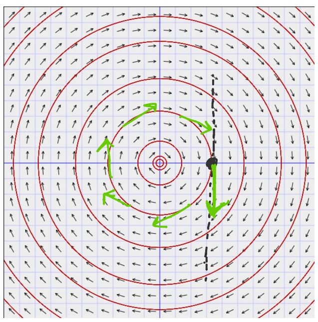
$\underline{\alpha = 0}$ – центар $\curvearrowleft X^* = (0,0)$

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

x_1

x_2

$x_1^2 + x_2^2 = const \;\to$ кругови $\to$ периодичне



$(1,0) \rightsquigarrow$ како је ориј. извод?

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow X' = AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$$