① Нека је $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathbb{R})$, $a_{ij}\geq 0$ за $i\neq j$. Нека је $B=e^A=[b_{ij}]_{i,j=1}^{n}\in M_n(\mathbb{R})$. Доказати да важи $b_{ij}\geq 0$, $\forall i,j$.

$$A=\begin{bmatrix} i=j & & \geq 0 \\ & \ddots & \\ \geq 0 & & \end{bmatrix} \rightsquigarrow B=e^A=\begin{bmatrix} \geq 0 \end{bmatrix}$$

(#) Ако $a_{ij}\geq 0, \forall i,j$ $\Rightarrow$ сви елементи од $\frac{A^k}{k!}$ ненегативни $\Rightarrow$ и њихова сума је таква

$$B=e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$$

$A=\underbrace{A_1}_{\text{сви ел. } \geq}+\overset{\text{дијагонална}}{D}$, хоћемо и да A_1, D комутирају

пр. $\underset{A}{\begin{bmatrix} -5 & & \\ & 4 & \\ & & -11 \end{bmatrix}} = \underset{A_1}{\begin{bmatrix} 6 & & \\ & 15 & \\ & & 0 \end{bmatrix}} + \underset{D}{\begin{bmatrix} -11 & & \\ & -11 & \\ & & -11 \end{bmatrix}}$

$$M=\max_{1\leq l\leq n}|a_{ll}|$$

$$D=\begin{bmatrix} -M & & \\ & -M & \\ & & \ddots \, -M \end{bmatrix} = -M\cdot E \quad , A_1=A-D=A+ME=[c_{ij}]_{i,j=1}^{n}$$

$$c_{ij}=\begin{cases} \overset{\geq 0}{a_{ij}}, & i\neq j \\ \underbrace{a_{ii}+M}_{\geq 0}, & i=j \end{cases} \geq 0$$

$$a_{ii}+M=a_{ii}+\max_{1\leq l\leq n}|a_{ll}|\geq a_{ii}+|a_{ii}|\geq 0$$

$$A_1D=A_1\cdot(-M\cdot E)=-M\cdot A_1E=-M\cdot A_1=-M\cdot E\cdot A_1=D\cdot A_1$$

(2) $\Rightarrow B=e^A=e^{A_1+D}=e^{A_1}\cdot e^{D}=e^{A_1}\cdot e^{-M}\cdot E=e^{-M}\cdot e^{A_1}$

$\left.\begin{array}{l} e^{-M}>0 \\ e^{A_1} \text{ има ел. } \geq 0 \text{, због (\#)} \end{array}\right\} \Rightarrow b_{ij}\geq 0 \ \forall i,j$

$$e^D=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-ME)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-M)^k\cdot E}{k!}=E\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-M)^k}{k!}=e^{-M}\cdot E$$

② Нека је $\lambda\in\mathbb{C}$ сопствена вредност матрице $A\in M_n(\mathbb{R})$. Доказати да је e^λ сопствена вредност матрице e^A.

I начин $\quad \exists v \neq 0, \quad Av = \lambda v$

Треба $\exists v_1 \neq 0$, $e^A \cdot v_1 = e^\lambda v_1$. Испашће да можемо узети $v_1 = v$.

$$e^A \cdot v = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) \cdot v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k v}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k v}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right) v = e^\lambda v$$

$$\begin{aligned} A^k v &= A^{k-1}(Av) = A^{k-1}(\lambda v) = \\ &= \lambda A^{k-1} v = \lambda A^{k-2}(Av) = \\ &= \lambda A^{k-2}(\lambda v) = \lambda^2 A^{k-2} v = \\ &= \dots = \lambda^{k-1}(Av) = \lambda^k v \end{aligned}$$

$\Rightarrow e^\lambda$ је сопс. вр. за e^A (и то баш за исти сопс. век. v)

II начин $\quad \det(A - \lambda E) = 0$

Хоћемо, $\det(e^A - e^\lambda E) = 0$

$$\det(e^A - e^\lambda E) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot E\right) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k - \lambda^k E}{k!}\right) =$$

$k=0$: $A^0 - \lambda^0 E = E - E = 0$

$(\lambda E)^k = \lambda^k E^k = \lambda^k E$

$$\overset{(*)}{=} \det\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{A^k - (\lambda E)^k}{k!}\right) =$$

$\det: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ непр.

$A_N \to A_\infty \Rightarrow \det(A_N) \to \det(A_\infty)$

$\lim_{N\to\infty} \det(A_N) = \det(\lim_{N\to\infty} A_N)$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{N\to\infty} \det\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{A^k - (\lambda E)^k}{k!}\right) =$$

$A^k - B^k = (A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \dots + B^{k-1})$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{N\to\infty} \det\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{N} (A - \lambda E) \cdot \frac{A^{k-1} + A^{k-1} \cdot \lambda + A^{k-2}\lambda^2 + \dots + \lambda^{k-1} \cdot E}{k!}}_{= M_N}\right) =$$

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{N\to\infty} \det\left((A - \lambda E) \cdot M_N\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[\underbrace{\det(A - \lambda E)}_{0} \cdot \det(M_N)\right] =$$

$$= \lim_{N\to\infty} 0 = 0.$$

$y' = Ay \qquad , A \in M_n(\mathbb{R})$

ОР: $y(x) = e^{xA} \cdot c \quad , c \in \mathbb{R}^n$

③ Решити систем ДЈ $y' = Ay$ рачунањем матрице e^{xA} у облику вежб. ако је i

③ Решити систем ДЈ $y' = Ay$ одређивањем матрице e^{xA} у облику реда, ако је:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ в) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

а) $$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \cdot A^k}{k!}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

индукцијом: $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

БАЗА: $k=1$, $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

КОРАК: $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{?}{\Rightarrow} A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ✓$$

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot k \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = xe^x$$

ОР: $y(x) = e^{xA} \cdot c = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix} \cdot c$, $c \in \mathbb{R}^2$

б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -E \cdot A = -A$$

$$A^4 = (A^2)^2 = (-E)^2 = E$$

$$A^k = \begin{cases} A, & k \equiv_4 1 \\ -E, & k \equiv_4 2 \\ -A, & k \equiv_4 3 \\ E, & k \equiv_4 0 \end{cases} = \begin{cases} (-1)^l E, & k = 2l, \ l \in \mathbb{N}_0 \\ (-1)^l A, & k = 2l+1, \ l \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$k = 4t + r$ $\quad A^{4t+r} = (A^4)^t \cdot A^r = E^t \cdot A^r = A^r$

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l} A^{2l}}{(2l)!} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1} A^{2l+1}}{(2l+1)!} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{(2l)!} (-1)^l E + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} (-1)^l \cdot A =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ $$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}}{(2l)!} (-1)^l = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \cos x$$

$\sum^{\infty} x^{2l+1} \ldots x^3 \ldots x^5 \ldots$

$\sum_{l=0} \frac{\dots}{(2l)!} \quad \dots \ 2! \quad 4! \quad 6!$

$k=4t+r, \quad A^{4t+r}=(A^4)^t\cdot A^r = E^t\cdot A^r = A^r$

$\rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}(-1)^l = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sin x$

ОР: $y(x)=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

$=\underbrace{R_x}_{\text{матрица ротације за } x}\cdot c, \quad c\in\mathbb{R}^2$

в) $A=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}}_{A_1} + \underbrace{\begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix}}_{A_2}$

$A^2=\dots$ → тешко

$A^3=\dots$

$$e^{xA}=e^{x(A_1+A_2)} \overset{(2)}{=} e^{xA_1}\cdot e^{xA_2} = e^{ax}\cdot E\cdot R_{xb} = e^{xa}\cdot R_{xb} = e^{ax}\cdot\begin{bmatrix}\cos(bx) & \sin(bx)\\ -\sin(bx) & \cos(bx)\end{bmatrix}.$$

$$A_1\cdot A_2 = a\cdot E\cdot A_2 = aA_2 = A_2\cdot a = A_2\cdot aE = A_2A_1$$

$$e^{xA_1}=e^{ax\cdot E} = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^k E}{k!}} = e^{ax}\cdot E$$

ОР: $y(x)=e^{xA}\cdot c, \quad c\in\mathbb{R}^2$

$$e^{xA_2} = e^{xb\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}} = R_{xb}$$

$$e^{x\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}} \overset{(в)}{=} R_x$$

Метод дијагонализације

$Y'=AY$

$A=T\cdot J\cdot T^{-1}$

T - матрица промене базе

J - у Жордановој нормалној форми

$A\sim J$

$$J=\begin{bmatrix}\boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_m}\end{bmatrix}$$

блокови

B_k је облика:

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & \lambda\end{bmatrix}$$, где је $\lambda\in\mathbb{R}$ матрице A

или

$$\begin{bmatrix} \boxed{R} & \boxed{E} & & \\ & \boxed{R} & \boxed{E} & \\ & & \ddots & \boxed{E} \\ & & & \boxed{R} \end{bmatrix}, \text{ где су } R = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ и } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и $a \pm ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ сопс. вредности матрице A $(a, b \in \mathbb{R})$

спец: J је дијагонална, ако може да буде

ОР: $y(x) = e^{xA} \cdot c = e^{xTJT^{-1}} \cdot c = T \cdot \boxed{e^{xJ}} \cdot T^{-1} \cdot c.$

зад (1) са пр. часа

знамо да нађемо!