Линеарни системи ДЈ са константним коефицијентима (ЛСДЈКК)

$Y' = AY$ (*), $A \in M_n(\mathbb{R})$

$Y', Y \in \mathbb{R}^n$, $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – лин. нез. решења система (*) = фундаментални скуп реш.

$\Phi(x) = [\varphi_1 \downarrow \ldots \varphi_n \downarrow] \in M_n(\ldots)$ = фундаментална матрица

ОР: $Y(x) = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$

$= \Phi(x) \cdot c$, $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = W(x) = \det \Phi(x)$ = Вронскијан

$W(x) \neq 0 \iff \Phi(x)$ фунд. матрица

Ојлерова метода

идеја: λ – сопс. вр. A

γ – сопс. век за λ

$\varphi(x) = e^{\lambda x} \cdot \gamma$ је решење $Y' = AY$

$A\gamma = \lambda\gamma$

$\varphi'(x) = (e^{\lambda x} \cdot \gamma)' = \gamma \cdot (e^{\lambda x})' = \lambda \gamma e^{\lambda x} =$

$= A\gamma e^{\lambda x} = A\varphi(x)$

(1) $y_1' = 5y_1 + 4y_2$ [случај реалних и различитих сопс. вредности]

$y_2' = 4y_1 + 5y_2$

$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $Y' = AY$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = I = I_d$

Нађемо сопс. вр. A: $\det(A - \lambda E) = 0$

$\det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$

$(5-\lambda)^2 - 4^2 = 0$

$(1-\lambda)(9-\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$

Нађемо сопс. векторе: $\lambda_1 = 1$ $(A - \lambda_1 E)\gamma_1 = 0$

$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ \ldots \end{bmatrix} = \vec{0} \longrightarrow 4a + 4b = 0 \} \Rightarrow b = -a$, $\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$

Нађемо сопс. векторе: $\underline{\lambda_1 = 1}$

$$(A-\lambda_1 E)\gamma_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \vec{0} \longrightarrow \left.\begin{matrix} 4a+4b=0 \\ \cancel{4a+4b=0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow b=-a \quad , \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$$

нпр. $a=1 \rightsquigarrow \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}\cdot\gamma_1 = e^{x}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 9}$

$$(A-\lambda_2 E)\gamma_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \vec{0} \longrightarrow \left.\begin{matrix} -4a+4b=0 \\ \cancel{4a-4b=0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a=b \quad , \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$$

нпр. $a=1 \rightsquigarrow \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

$$\varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x}\gamma_2 = e^{9x}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{9x} \\ e^{9x} \end{bmatrix}.$$

У овом случају су увек независна $(W(\varphi_1,\varphi_2)(x) \neq 0)$ тј. ОР: $Y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = c_1\begin{bmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} e^{9x} \\ e^{9x} \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} e^{x} & e^{9x} \\ -e^{x} & e^{9x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

или другачије: $y_1(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{9x}$,
$y_2(x) = -c_1 e^{x} + c_2 e^{9x}.$

(2) $y_1' = 2y_1 + y_2$ [случај комплексних и различитих сопс. бр.]

$y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3$

$y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3$

$$Y' = AY \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda)^2 + 1\cdot(-1)^2 + 0 - 0 - (-1)\cdot 2\cdot(2-\lambda) - 1^2(3-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)(9-6\lambda+\lambda^2) + \underbrace{1+4-2\lambda-3+\lambda}_{-\lambda+2} = 0$$

$$(2-\lambda)(10-6\lambda+\lambda^2) = 0$$

$$-\lambda+2$$

$$(2-\lambda)(10-6\lambda+\lambda^2)=0$$

$$D=36-4\cdot 10=36-40=-4$$

$$\lambda_1=2\ ,\qquad \lambda_{2/3}=\frac{6\pm i\cdot 2}{2}=3\pm i. \qquad (\lambda_3=\overline{\lambda_2})$$

$$e^{\lambda x}=e^{(a+ib)x} \nearrow \mathrm{Re} \quad \searrow \mathrm{Im}$$

$\underline{\lambda_1=2}$

$$(A-\lambda_1 E)\gamma_1=0 \quad \therefore \quad \gamma_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \varphi_1(x)=e^{2x}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2x}\\0\\e^{2x}\end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda_2=3+i}$ $\longrightarrow$ тражимо комплексни сопст. век.

$$(A-\lambda_2 E)\gamma_2=0, \quad \gamma_2\in\mathbb{C}^3$$

$$\begin{bmatrix}\overset{-1-i}{2-(3+i)} & 1 & 0\\ 1 & \overset{-i}{3-(3+i)} & -1\\ -1 & 2 & \underset{-i}{3-(3+i)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned}
(-1-i)a+b &=0 \quad /\cdot i \qquad /\cdot(-2)\\
a-ib-c&=0\\
-a+2b-ic&=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1-i)a+b &=0\\
(-i+2)a\quad -c&=0 \quad /\cdot(-i)\\
(1+2i)a\quad -ic&=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1-i)a+b &=0\\
(-i+2)a\quad -c&=0\\
\cancel{0\cdot a \quad +0\cdot c=0}
\end{aligned}$$

$i(-1-i)+1=$
$=-i-i^2+1=$
$=-i+1+1=$
$=-i+2$

$(-i+2)(-i)+(1+2i)$
$=-1-2i+1+2i=0$

$$b=(1+i)a, \quad c=(2-i)a \rightsquigarrow \begin{bmatrix}a\\(1+i)a\\(2-i)\cdot a\end{bmatrix}$$

$$\text{нпр. } a=1 \rightsquigarrow \gamma_2=\begin{bmatrix}1\\1+i\\2-i\end{bmatrix}.$$

$$(A-\lambda_2 E)\gamma_2=0, \quad (A-\lambda_3 E)\gamma_3=0 \qquad \lambda_3=\overline{\lambda_2} \Rightarrow \gamma_3=\overline{\gamma_2}$$

$$\varphi_2(x)=\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_2 x}\cdot\gamma_2\right), \quad \varphi_3(x)=\mathrm{Im}\left(e^{\lambda_2 x}\cdot\gamma_2\right)$$

$$\psi(x)=e^{\lambda_2 x}\cdot\gamma_2=e^{(3+i)x}\cdot\begin{bmatrix}1\\1+i\\2-i\end{bmatrix}=e^{3x}(\cos x+i\sin x)\cdot\begin{bmatrix}1\\1+i\\2-i\end{bmatrix}=e^{3x}\begin{bmatrix}\cos x+i\sin x\\ \cos x+i\sin x+i\cos x-\sin x\\ 2\cos x+2i\sin x-i\cos x+\sin x\end{bmatrix}$$

$$\varphi_2(x)=\mathrm{Re}\,\psi(x)=\begin{bmatrix}e^{3x}\cos x\\ e^{3x}(\cos x-\sin x)\\ e^{3x}(2\cos x+\sin x)\end{bmatrix}, \quad \varphi_3(x)=\mathrm{Im}\,\psi(x)=\begin{bmatrix}e^{3x}\sin x\\ e^{3x}(\sin x+\cos x)\\ e^{3x}(2\sin x-\cos x)\end{bmatrix}$$

$$\ldots, \quad c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}.$$

И овде је увек $W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(x)\neq 0 \Rightarrow$ ОР: $Y(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+c_3\varphi_3(x)$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

↳ кад год имамо различите сопс. вр. ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

[случај поновљених реалних сопс. вр.]

$\lambda\in\mathbb{R}$ сопс. вр. од A вишеструкости k

$n=\dim A$, $r=\operatorname{rang}(A-\lambda E)$, $m=n-r$ → говори колико лин. нез. решења система $(A-\lambda E)\gamma=0$ имамо

1° $m=k$, $\varphi_1(x)=\gamma_1 e^{\lambda x}$, $\varphi_2(x)=\gamma_2 e^{\lambda x}$, ..., $\varphi_k(x)=\gamma_k e^{\lambda x}$

2° $m<k$, решења тражимо у облику $\varphi(x)=\boxed{P_{k-m}[x]}\cdot e^{\lambda x}$ → вектор чије компоненте су полиноми по x степена највише $k-m$

→ треба да нађемо k независних решења

(3)

$$y_1'=2y_1-y_2-y_3$$
$$y_2'=3y_1-2y_2-3y_3$$
$$y_3'=-y_1+y_2+2y_3$$

[случај $m=k$]

$$Y'=AY,\quad A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\3&-2&-3\\-1&1&2\end{bmatrix},\quad \det(A-\lambda E)=0\Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=1$$

$\underline{\lambda_1=0}$

$$(A-\lambda_1E)\gamma_1=0 \therefore \gamma_1=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix},\quad \varphi_1(x)=e^{0x}\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda_2=\lambda_3=1}$

$k=2$

$$r=\operatorname{rang}(A-\lambda_2E)=\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}1&-1&-1\\3&-3&-3\\-1&1&1\end{bmatrix}\right)=\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=1$$

$/\cdot 3$ $/\cdot(-1)$

зависне

$n=\dim A=3 \Rightarrow m=n-r=3-1=2 \Rightarrow m=k$

$$(A-\lambda_2E)\gamma=0$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&-1\\ \cancel{3}&\cancel{-3}&\cancel{-3}\\ \cancel{-1}&\cancel{1}&\cancel{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightsquigarrow a-b-c=0,\quad c=a-b$$

$$\begin{bmatrix}a\\b\\a-b\end{bmatrix}=a\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{\gamma_2}+b\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}}_{\gamma_3}$$

$$\varphi_2(x) = e^x \gamma_2 = \begin{bmatrix} e^x \\ 0 \\ e^x \end{bmatrix} \quad , \varphi_3(x) = e^x \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \\ -e^x \end{bmatrix}.$$

Независни?

$$W(x) = \det\left(\begin{bmatrix} \varphi_1\downarrow & \varphi_2\downarrow & \varphi_3\downarrow \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 3 & 0 & e^x \\ -1 & e^x & -e^x \end{bmatrix}\right) = 0 - e^{2x} + 0 - e^{2x} + 3e^{2x} = 3e^{2x} \neq 0.$$

независни су $\Rightarrow$ ОР: $Y(x) = \begin{bmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 3 & 0 & e^x \\ -1 & e^x & -e^x \end{bmatrix} \cdot C \quad , C \in \mathbb{R}^3.$

(4) $y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3$ [случај $m<k$]

$y_2' = 2y_1 - y_2 - 2y_3$

$y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3$

$Y' = AY, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$

$k = 3$

$n = \dim A = 3$

$r = \operatorname{rang}(A - \lambda_1 E) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1.$

$/\cdot(-2) \; / \cdot(-1)$

$m = n - r = 3 - 1 = 2 \quad , \quad m < k$

Тражимо решења у облику $\varphi(x) = P_{k-m}[x] \cdot e^{\lambda_1 x} = e^x \cdot P_1[x] = e^x \cdot \begin{bmatrix} a_1 x + b_1 \\ a_2 x + b_2 \\ a_3 x + b_3 \end{bmatrix}$

$\varphi'(x) = A\varphi(x)$

$$\cancel{e^x} \cdot \begin{bmatrix} a_1 x + a_1 + b_1 \\ a_2 x + a_2 + b_2 \\ a_3 x + a_3 + b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \cancel{e^x} \begin{bmatrix} a_1 x + b_1 \\ a_2 x + b_2 \\ a_3 x + b_3 \end{bmatrix}$$

$(e^x(ax+b))' = e^x(ax+b) + e^x \cdot a =$
$= e^x(ax + a + b)$

$$\begin{aligned} \underline{a_1 x} + \underline{a_1 + b_1} &= \underline{(2a_1 - a_2 - a_3)x} + \underline{(2b_1 - b_2 - b_3)} \\ \underline{a_2 x} + \underline{a_2 + b_2} &= \underline{(2a_1 - a_2 - 2a_3)x} + \underline{(2b_1 - b_2 - 2b_3)} \\ \underline{a_3 x} + \underline{a_3 + b_3} &= \underline{(-a_1 + a_2 + 2a_3)x} + \underline{(-b_1 + b_2 + 2b_3)} \end{aligned} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a_1 - a_2 - a_3 = 0 \qquad \cdot 2 \quad \cdot(-1)$$

$$\cancel{2a_1 - 2a_2 - 2a_3 = 0}$$

$$\cancel{-a_1 + a_2 + a_3 = 0}$$

$$b_1 - b_2 - b_3 = a_1 \qquad \cdot 2 \quad (-1)$$

$$2b_1 - 2b_2 - 2b_3 = a_2$$

$$-b_1 + b_2 + b_3 = a_3$$

систем ~~6×6~~ 4×4

$$2a_1 = 2(b_1 - b_2 - b_3) = a_2$$

$$-a_1 = -(b_1 - b_2 - b_3) = a_3$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 \\ a_3 &= -a_1 \\ b_1 &= a_1 + b_2 + b_3 \end{aligned}\right\} \quad a_1, b_2, b_3 \text{ – параметри}$$

(k параметара)

$$\varphi(x) = e^{x} \cdot \begin{bmatrix} a_1 x + (a_1 + b_2 + b_3) \\ 2a_1 x + b_2 \\ -a_1 x + b_3 \end{bmatrix} = a_1 \cdot \underbrace{e^{x} \cdot \begin{bmatrix} x+1 \\ 2x \\ -x \end{bmatrix}}_{\varphi_1(x)} + b_2 \cdot \underbrace{e^{x} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\varphi_2(x)} + b_3 \cdot \underbrace{e^{x} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\varphi_3(x)}$$

Независност?

$$W(x) = \det\left(e^{x} \cdot \begin{bmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 2x & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \left((-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ 2x & 1 \end{vmatrix}\right) \cdot e^{3x} = e^{3x} \cdot (x - x + 1) = e^{3x} \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{ОР}: \; y(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + c_3 \varphi_3(x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

(*) Ако имамо вишеструко $\lambda \in \mathbb{C}$, сличан је поступак, само узимамо Re и Im НЕЋЕМО РАДИТИ!
↳ као у зад. ③ и ④.