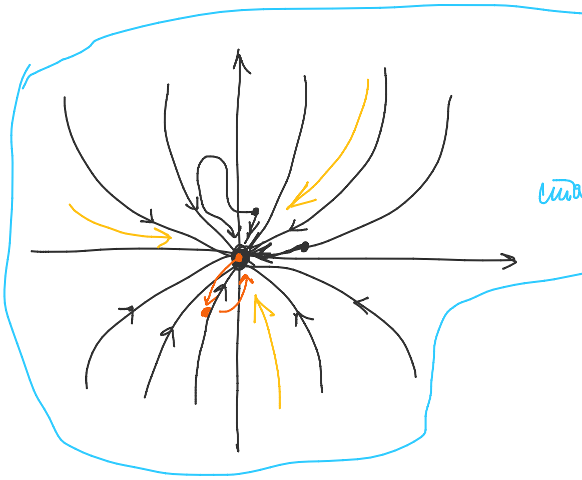
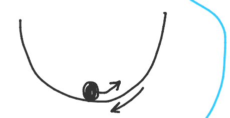
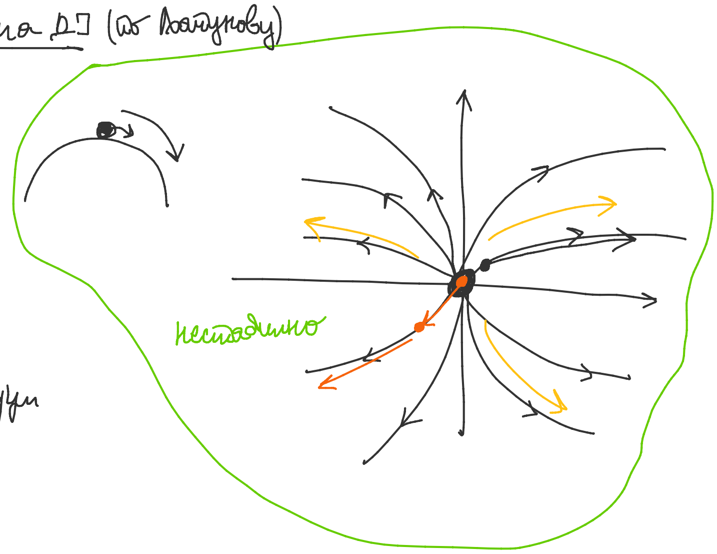
Стабилност еквилибријума ДЈ (по Љапунову)







$X^* = X_*$ - еквилибријум

$X' = F(X)$, $F(X^*) = 0$

Деф. Еквилибријум X^* је:

1) стабилан, ако $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall X(t)$ решење$, X(t_0) = X_0)$ $\|X_0 - X^*\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X^*\| < \varepsilon$, $\forall t \geq T$

2) нестабилан, ако није стабилан

3) асимптотски стабилан, ако је стабилан и $(\exists \delta > 0)$ $\|X_0 - X^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} X(t) = X^*$.

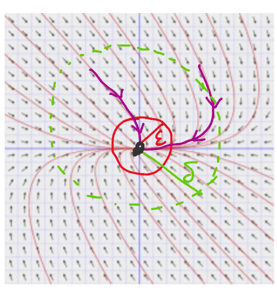
1. Скицирати фазне портрете динамичких система, а затим испитати стабилност њихових еквилибријума:

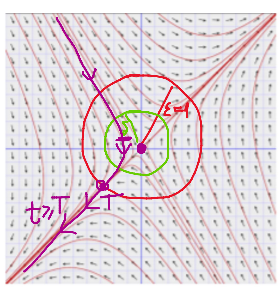
а) $x_1' = -x_1 + 2x_2$, $x_2' = -3x_2$ $\downarrow$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ стабилан чвор

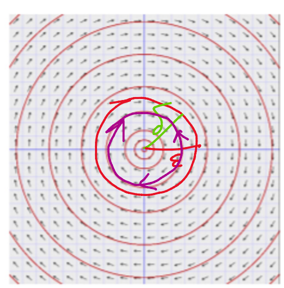
б) $x_1' = -x_1 + 3x_2$, $x_2' = 5x_1 - 3x_2$ $\downarrow$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -6$ седло

в) $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$. $\downarrow$ $\lambda_{1/2} = \pm i$ центар

$X^* = (0,0)$ у сва три







а) стабилан, да ли је АС? Да, јер $X(t) \to X^*$

домаћи: решити систем и изр. $\lim_{t \to \infty} X(t)$, $X(0) = X_0$.

б) $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists X(t)$ реш.$)$ $\|X_0 - X^*\| < \delta \wedge \|X_0 - X(t)\| \geq \varepsilon$, $\forall t \geq T$.

↳ деф. нест.

↳ деф. нест.

$\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ произв. мало, $\exists$ решење које почиње δ- близу X^* и излази ван ε-околине $\forall t \geq T$.
нестабилан

домаћи: решити систем и наћи то решење

(нпр. $X(0) = \begin{bmatrix} \delta/2 \\ 0 \end{bmatrix} \in B(X^*; \delta)$)

в) $\varepsilon > 0$ дато, узмемо $\delta = \varepsilon$

$\|X(t)\| = \|X_0\|$, $\|X_0\| < \delta \Rightarrow \|X(t)\| < \varepsilon$ ✓ стабилан

АС? $\nexists \lim\limits_{t\to\infty} X(t)$, тј. $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) \neq X^*$.

$\boxed{\text{Т}}$ (Прва Т Љапунова, метод сопс. вр)

$$X' = F(X) \quad , A = dF(X^*)$$

1) Ако за сваку сопс. вр. λ од A важи $Re(\lambda) < 0 \Rightarrow X^*$ асимптотски стабилан

2) Ако $\exists \lambda$ сопс. вр. од A тд. $Re(\lambda) > 0 \Rightarrow X^*$ нестабилан

$$F(X) = F(X^*) + \underbrace{dF(X^*) \cdot (X - X^*)}_{\text{апроксимација}} + o(X - X^*)$$

$$X' = F(X) \rightsquigarrow X' = AX \quad , A = dF(X^*)$$

$F = (F_1, \dots, F_n)$

$X = (x_1, \dots, x_n)$

$$dF(X^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(X^*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(X^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(X^*) & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X^*) \end{bmatrix}$$

2. Испитати стабилност еквилибријума из задатка 1 помоћу теореме Љапунова о сопственим вредностима.

$$X' = AX \quad , F(X) = A \cdot X \quad , dF(X) = A \quad , dF(X^*) = A$$

а) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $Re(\lambda_1) = -1 < 0$, $Re(\lambda_2) = -3 < 0 \overset{T1)}{\Rightarrow}$ АС

б) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -6$, $Re(\lambda_1) = 2 > 0 \overset{T2)}{\Rightarrow} X^*$ нестабилан

в) $\lambda_{1/2} = \pm i$, $Re(\lambda_{1/2}) = 0 \rightsquigarrow$ из Т не знамо ништа

3. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$x_1' = e^{x_1} - e^{-3x_3} \quad = F_1$$
$$x_2' = 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) = F_2$$
$$x_3' = \ln(1 - 3x_1 + x_3), \quad = F_3$$

а затим испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0, 0, 0)$.

$X' = 0$, $e^{x_1} - e^{-3x_3} = 0 \longrightarrow e^{x_1} = e^{-3x_3} \Rightarrow x_1 = -3x_3$

$4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) = 0$

$\ln(1 - 3x_1 + x_3) = 0 \longrightarrow 1 - 3x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 3x_1$

$\Big\} \; x_1 = x_3 = 0$

$4 \cdot 0 - 3\sin(0 + x_2) = 0 \Rightarrow \sin x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$$X^* \in \{(0, k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$X^* = (0,0,0)$:

$$\underset{(x_1,x_2,x_3)}{dF(X)} = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & 3e^{-3x_3} \\ -3\cos(x_1+x_2) & -3\cos(x_1+x_2) & 4 \\ \dfrac{-3}{1-3x_1+x_3} & 0 & \dfrac{1}{1-3x_1+x_3} \end{bmatrix}$$

$$A = \underset{(0,0,0)}{dF(X^*)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = -3 \; , \; \lambda_{2/3} = 1 \pm 3i$$

$Re(\lambda_1) = -3$

$Re(\lambda_{2/3}) = 1 > 0$

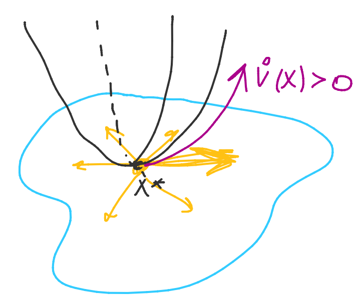
$\Rightarrow X^* = (0,0,0)$ нестабилан

$\boxed{T}$ Нека је X^* еквилибријум $X' = F(X)$. У некој околини $\mathcal{U} \ni X^*$ постоји фја $V : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ тд.

1) $V \in C^1(\mathcal{U})$

2) $V(X^*) = 0$ и $V(X) > 0$, $\forall X \in \mathcal{U} \setminus \{X^*\}$ (позитивно дефинитна)

3) Важи једно од:



- $\dot V(X) \le 0$, $\forall X \in \mathcal{U} \setminus \{X^*\} \Rightarrow X^*$ стабилан
- $\dot V(X) < 0$, $\forall X \in \mathcal{U} \setminus \{X^*\} \Rightarrow X^*$ AC
- $\dot V(X) > 0$, $\forall X \in \mathcal{U} \setminus \{X^*\} \Rightarrow X^*$ нестабилан

– $\dot{V}(X) > 0$, $\forall X \in U \setminus \{X^*\}$ $\Rightarrow$ X^* нестабилан

често: $V(X) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$

$a_1, \dots, a_n > 0$

$\dot{V}(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle = \nabla V(X) \circ F(X)$ $\rightarrow$ извод V дуж трајекторија

V – функција Љапунова

4. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$x_1' = (x_3+1)(2x_2 - x_1)$$
$$x_2' = -(x_3+1)(x_1+x_2)$$
$$x_3' = -x_3^3,$$

а затим испитати њихову стабилност.

$$\left.\begin{aligned} (x_3+1)(2x_2-x_1) &= 0 \\ -(x_3+1)(x_1+x_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 2x_2 - x_1 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$-x_3^3 = 0 \longrightarrow x_3 = 0$$

$$X^* = (0,0,0)$$

домаћ. методом сопс. вр. не добијамо одговор

$V(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$, $a, b, c > 0$ $\qquad \nabla V = (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3)$

1) $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$

2) $V(0,0,0) = 0$, $V(X) > 0$, $X \neq X^*$

3) $\dot{V}(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle = \langle (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3), (F_1, F_2, F_3) \rangle =$

$$= (x_3+1)\big(2ax_1(2x_2 - x_1) - 2bx_2(x_1+x_2)\big) - 2cx_3^4 =$$

$$= \underbrace{(x_3+1)}_{\text{јесте} > 0 \text{ у некој околини } (0,0,0)}\big(\underbrace{-2ax_1^2 - 2bx_2^2}_{<0} + \underbrace{x_1x_2(4a-2b)}_{=0 \text{ – хоћемо!}}\big) \underbrace{-2cx_3^4}_{<0}$$

$4a = 2b$

узмемо $B(X^*; \frac{1}{2}) = U$, ту важи $x_3 + 1 > \frac{1}{2} > 0$

$a=1, b=2, c=1$: $\quad \dot{V}(X) = \underbrace{(x_3+1)}_{\geq 0}\underbrace{(-2x_1^2 - 4x_2^2)}_{\leq 0} \underbrace{-2x_3^4}_{\leq 0} < 0$, за $X \in U \setminus \{X^*\}$

$\Rightarrow X^*$ је АС

5. Доказати да је координатни почетак стабилан, али не и асимптотски стабилан еквилибријум система $X' = AX$, где је $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0,0)$ система:

1)

а) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_1x_2^2 \\ -x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ б) $X' = AX + \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 \\ x_2^3 + x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ в) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$ 2)

3) Показати да је у сва три случаја матрица $\mathrm{d}F(\mathbf{0})$ једнака и да метод сопствених вредности не даје одговор.

Упутст.: 1) погледати (1В)

3) добија се $dF(0) = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2) а) $X' = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2 \\ x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix} \leftarrow F(X)$

$V(x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_2^2, \quad a,b > 0$

$V \in C^1$, V поз. деф.

$\mathring{V}(X) = \langle (2ax_1, 2bx_2), (F_1,F_2) \rangle = -2ax_1x_2 - 2ax_1^4 - 2ax_1^2x_2^2 + 2bx_1x_2 - 2bx_2^4 - 2bx_1^2x_2^2 =$

$= \underbrace{-2ax_1^4}_{\le 0} \underbrace{-2bx_2^4}_{\le 0} \underbrace{-x_1^2x_2^2(2a+2b)}_{\le 0} + \underbrace{x_1x_2(2b-2a)}_{=0}$

нпр. $a=b=1$: $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$

$\mathring{V}(X) = -2x_1^4 - 2x_2^4 - x_1^2x_2^2 \cdot 4 = -2(x_1^2+x_2^2)^2 < 0, \quad \forall X \neq X^*$

$\Rightarrow X^*$ је АС

б) $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$\mathring{V}(X) = \ldots = 2(x_1^2+x_2^2)^2 > 0, \quad \forall X \neq X^* \Rightarrow X^*$ нестабилан

в) $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$\mathring{V}(X) = \ldots = 0 \Rightarrow X^*$ стабилан

6. Испитати стабилност положаја равнотеже $X^* = (0,0)$ динамичког система

$$x_1' = -\sin x_2$$
$$x_2' = x_1.$$

$A = dF(X^*) \to$ не даје одг.

$V = ?$, $F(x_1,x_2) = (-\sin x_2, x_1)$

$\mathring{V}(X) = \langle \nabla V, F \rangle \overset{?}{=} 0$ → ми бисмо хтели!

$\nabla V(x_1,x_2) = (x_1, \sin x_2) \rightsquigarrow V = ?$ поз. деф.

$V(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{2} - \cos x_2 + C$

$V(0,0) = 0$

$\Rightarrow C = 1$

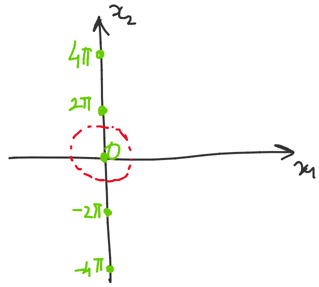
↪ ми бисмо хтели!

$$\left.\begin{array}{l} V(x_1 x_2) = \frac{1}{2} - \cos x_2 + C \\ V(0,0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C = 1$$

$$V(x_1 x_2) = \underbrace{\frac{x_1^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{1 - \cos x_2}_{\geq 0} > 0, \ \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{U} \setminus \{(0,0)\}$$

шта је $\mathcal{U}$?

$$V = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \cos x_2 = 1 \end{array}\right\} (x_1, x_2) = \underline{\underline{(0, 2\pi k)}}$$



$\mathcal{U} = B(X^*; 2\pi)$, на $\mathcal{U}$ важи $V(X) > 0$, $X \neq X^*$

V је ф-ја Љапунова, $\dot{V}(X) = 0 \Rightarrow X^*$ је стабилан