6 - петак 09.04.2021.

(1) $y' = Ay$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$$

$k=4$

$\Rightarrow \dim = 2$

$$(A-2E)\gamma = 0 \Rightarrow \dots \ \gamma \in \mathcal{L}in\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow m = 2 \Rightarrow 2 \text{ Жорд блока}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \quad \vee \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

$2+2 \qquad\qquad 3+1$

$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (\lambda-2)^4$

$\mu(\lambda) = (\lambda-2)^k$, $k \le 4$

$\mu(A) = 0$, $(A-2E)^k = 0$

$k=1$: $A - 2E \neq 0$

$k=2$: $(A-2E)^2 \neq 0$

$k=3$: $(A-2E)^3 = 0 \Rightarrow \mu(\lambda) = (\lambda-2)^3$, $\deg \mu = 3 \Rightarrow$ ред највећег блока је 3 $\Rightarrow J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{2} \end{bmatrix}$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ – сопс. век $\Rightarrow$ још 2 уопштена

уопштени за γ_4:

$(A-2E)\gamma = \gamma_4$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= 0 \\ \boxed{0 = 1} & \ \times \\ d &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ нема решења $\Rightarrow \gamma_4$ нема уопштене сопс. век.

$\Rightarrow$ одговара му блок 1×1.

уопштени за γ_1:

$$(A-2E)\gamma_2 = \gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\gamma_1 \qquad \gamma_4$

$3 \qquad (1\times1)$

$$(A-2E)\gamma_2 = \gamma_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ d = 1 \\ a = 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow \gamma_2 = \begin{bmatrix}0\\b\\c\\1\end{bmatrix} \overset{b=c=0}{\rightsquigarrow} \gamma_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \gamma_1 & & \gamma_4 \\ \rightsquigarrow & & (1\times 1) \\ \gamma_2 & & \\ \rightsquigarrow & & \\ \gamma_3 & \to \text{уопштени за } \gamma_2 & \\ (3\times 3) & & \end{matrix}$$

$$(A-2E)\gamma_3 = \gamma_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ d = 0 \\ a = 1 \end{matrix} \Rightarrow \gamma_3 = \begin{bmatrix}1\\b\\c\\0\end{bmatrix} \overset{b=c=0}{\rightsquigarrow} \gamma_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \gamma_1\downarrow & \gamma_2\downarrow & \gamma_3\downarrow & \gamma_4\downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\det T \neq 0)$$

$$e^{xJ} = \begin{bmatrix} e^{xB} & \\ & e^{2x} \end{bmatrix} = e^{2x} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \\ & 1 & x & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} B & \\ & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N}$$

$$DN = (2E)N = 2N = N\cdot(2E) = ND$$

$$\Downarrow$$

$$e^{xB} = e^{x(N+D)} = e^{xN}\cdot e^{xD} = \left(E + x\cdot N + \frac{x^2}{2}N^2\right)\cdot \begin{bmatrix} e^{2x} & & \\ & e^{2x} & \\ & & e^{2x} \end{bmatrix} = e^{2x}\cdot \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^3 = 0$$

OP: $y(x) = Te^{xJ}\cdot c,\ c\in\mathbb{R}^4$

(2) $y' = Ay$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_{3/4} = 1 \pm i$$

$\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 2}$ $(k=2)$

$$(A-2E)\gamma = 0 \rightsquigarrow \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow m = 1 \Rightarrow$ jedan уопштени
+ jedan Ж. блок

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } J$$

$$(A-2E)\gamma_2 = \gamma_1$$

$$\dots \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_{3/4} = 1 \pm i}$: $\quad \alpha + i\beta = 1 + i, \ \alpha = \beta = 1$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } J$$

$$(A - (1+i)E)\gamma = 0$$

$$\dots \gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1+i \\ -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{xJ} = \begin{bmatrix} e^{x\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} & \\ & e^{x\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2x}\cdot\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \\ & e^{x}\cdot R_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x}\cos x & e^{x}\sin x \\ 0 & 0 & -e^{x}\sin x & e^{x}\cos x \end{bmatrix}$$

OP: $Y(x) = Te^{xJ}\cdot c,\ c\in\mathbb{R}^4$

(3) $y' = Ay$

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&-1\\0&1&3\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2 \Rightarrow k=3$$

$$(A-2E)v=0 \rightsquigarrow v=a\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow \dim\ker(A-2E)=2 \Rightarrow m=2$$

$\Rightarrow$ 2 Ж. блока

једина могућност за J: $J=\begin{bmatrix}2&1&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$ [провера: $\deg\mu=2$]

$$e^{xJ}=\begin{bmatrix}e^{x\begin{bmatrix}2&1\\&2\end{bmatrix}}&\\&e^{2x}\end{bmatrix}=e^{2x}\cdot\begin{bmatrix}1&x&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$T=?$ Имамо 2 сопств. век $v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

треба нам 1 уопштени – да ли одговара v_1 или v_2?

$(A-2E)v_3=v_1$

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

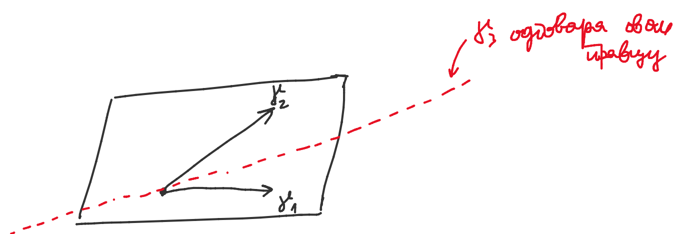
$b+c=1$
$-b-c=0$ ↯
$b+c=0$

$(A-2E)v_3=v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

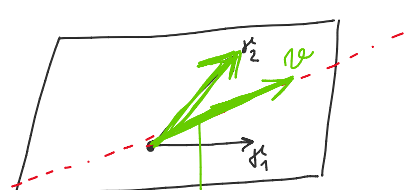
$b+c=0$
$-b-c=1$ ↯
$b+c=-1$

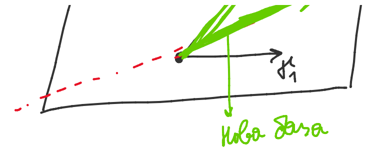
Шта сад?

сопствени потпростор: $\ker(A-2E)$



мењамо базу од $\ker(A-2E)$:





$v = ?$, $v \in \mathrm{Lin}\{\gamma_1, \gamma_2\}$ и да v има удължени собствени вектор γ_3

$\alpha, \beta = ?$ т.ч. $\exists$ решение $\quad (A-2E)\gamma_3 = v = \alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \alpha\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\beta \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} b+c &= \alpha \\ -b-c &= \beta \\ b+c &= -\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = -\beta$$

нпр. $\alpha = 1, \beta = -1 \qquad b+c = 1, \; c = 1-b$

$$v = \gamma_1 - \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \gamma_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1-b \end{bmatrix} \xrightarrow{a=b=0} \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ -удължени св.век за v

$v \rightsquigarrow \gamma_3$, γ_2

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{2} \end{bmatrix} \rightsquigarrow T = \begin{bmatrix} \boxed{v\downarrow \;\; \gamma_3\downarrow} & \boxed{\gamma_2\downarrow} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\det T \neq 0)$$

ОР: $y(x) = Te^{xJ}\cdot c, \; c \in \mathbb{R}^3$

(4) $y' = Ay$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1/2} = \lambda_{3/4} = \pm i$$

$\lambda_1 = i, \; k = 2 \qquad \alpha + i\beta \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} \quad \vee \quad J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

1 Ж. блок $\qquad$ 2 Ж. блока

$(A-\lambda_1 E)\gamma = 0$

$$\therefore\ \gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\dim_{\mathbb{C}}}_{\hookrightarrow \text{комплексна дим.}} Ker(A-\lambda_1 E) = 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow 1 \text{ Ж. блок.}$$

(1 собс. век. имаме)

$$\Rightarrow J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ако би се добила 2 собс. век: γ_1 и γ_2 $\Rightarrow m = 2 \Rightarrow J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{bmatrix}$

и $T = [\underbrace{Re\gamma_1\!\downarrow\ Im\gamma_1\!\downarrow}\ \underbrace{Re\gamma_2\!\downarrow\ Im\gamma_2\!\downarrow}]$, $e^{xJ} = \begin{bmatrix} e^{x\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]} & \\ & e^{x\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x & \\ & R_x \end{bmatrix}$

γ_2 – присъединени за γ_1:

$(A - iE)\gamma_2 = \gamma_1$

$$\therefore\ \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1-i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T = [Re\gamma_1\!\downarrow\ Im\gamma_1\!\downarrow\ Re\gamma_2\!\downarrow\ Im\gamma_2\!\downarrow] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\det T \neq 0)$$

$$J = \begin{bmatrix} A & E_2 \\ 0 & A \end{bmatrix},\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(e^{xJ} \neq \begin{bmatrix} e^{xA} & e^{xE_2} \\ 0 & e^{xA} \end{bmatrix} \right)$$

$$J = \underset{\overset{\shortparallel}{D}}{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}} + \underset{\overset{\shortparallel}{N}}{\begin{bmatrix} 0 & E_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}},\quad DN = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & E_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ND = \begin{bmatrix} 0 & E_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{xJ} = e^{xD} \cdot e^{xN}$$

$$e^{xD} = e^{x\left[\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right]} = \begin{bmatrix} e^{xA} & 0 \\ 0 & e^{xA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x & 0 \\ 0 & R_x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{xJ} = \begin{bmatrix} R_x & 0 \\ \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_2 & xE_2 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x & xR_x \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & e \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & R_x \end{bmatrix}$$

$$N^2 = 0 \Rightarrow e^{xN} = E + xN = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2 & xE_2 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{xJ} = \begin{bmatrix} R_x & 0 \\ 0 & R_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 & xE_2 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x & xR_x \\ 0 & R_x \end{bmatrix}$$

$$OP: y(x) = Te^{xJ} \cdot c = T \cdot \begin{bmatrix} \cos x & \sin x & x\cos x & x\sin x \\ -\sin x & \cos x & -x\sin x & x\cos x \\ 0 & 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & 0 & -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \cdot c, \quad c \in \mathbb{R}^4$$