① $y_1' = y_1 - y_2 + y_3$

$y_2' = y_1 + y_2 - y_3$

$y_3' = 2y_1 - y_2$

$$y' = Ay \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(A - \lambda E) = 0 \; \vdots$$

```
>> A=[1 -1 1; 1 1 -1; 2 -1 0]

A =

     1    -1     1
     1     1    -1
     2    -1     0

>> eig(A)

ans =

  -1.0000
   1.0000
   2.0000
```

← листа сопствених вредности од A

$$\lambda_1 = -1 \quad , \lambda_2 = 1 \quad , \lambda_3 = 2$$

$$A = T \cdot \dot{J} \cdot T^{-1}$$

$$(A - \lambda_1 E)\gamma_1 = 0 \qquad \lambda_2 \to \gamma_2 \qquad \lambda_3 \to \gamma_3$$

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad T = \begin{bmatrix} \gamma_1 \downarrow & \gamma_2 \downarrow & \gamma_3 \downarrow \end{bmatrix}$$

```
>> [T J]=eig(A)

T =
       γ1         γ2         γ3
    0.1690    -0.5774     0.7071
   -0.5071    -0.5774     0.0000
   -0.8452    -0.5774     0.7071

J =

   -1.0000          0          0
         0     1.0000          0
         0          0     2.0000
```

T – матрица промене базе састављена од нормираних вектора

J – дијагонална

$\dot{J} \sim A$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{35}} \\ -\frac{3}{\sqrt{35}} \\ -\frac{5}{\sqrt{35}} \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad , \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>> T=[1 1 1; -3 1 0; -5 1 1]

T =

     1     1     1
    -3     1     0
    -5     1     1

>> det(T)

ans =

     6
```

→ детерминанта матрице T

↗ инверз матрице T

```
>> inv(T)

ans =

    0.1667    0.0000   -0.1667
    0.5000    1.0000   -0.5000
    0.3333   -1.0000    0.6667
```

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} \cdot Adj(T) = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -6 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$e^{x\dot{J}} = \exp\left(x\cdot\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}e^{-x} & & \\ & e^{x} & \\ & & e^{2x}\end{bmatrix}$$

ОР: $y(x) = e^{xA}\cdot c = T e^{x\dot{J}}\underbrace{T^{-1}\cdot c}_{c_1} = T e^{x\dot{J}}\cdot c_1 \quad , c, c_1 \in \mathbb{R}^3$

② $y' = Ay$, $A = \begin{bmatrix}-3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

```
>> A=[-3 0 0; 0 3 -2; 0 1 1]

A =

    -3     0     0
     0     3    -2
     0     1     1

>> eig(A)

ans =

   2.0000 + 1.0000i
   2.0000 - 1.0000i
  -3.0000 + 0.0000i
```

$\lambda_1 = -3 \quad , \lambda_{2/3} = 2 \pm i$

$$\dot{J} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \lambda_1=-3 & \lambda_2 = 2+i \end{array} \\ \begin{bmatrix}-3 & & \\ & 2 & 1 \\ & -1 & 2\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\alpha \pm i\beta \longleftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$$

$T = ?$

$\lambda_1 = -3 \rightsquigarrow \gamma_1 \qquad (A-\lambda_1 E)\gamma_1 = 0$

$\lambda_2 = 2+i \rightsquigarrow \gamma_2 \rightsquigarrow \mathrm{Re}\,\gamma_2 \quad \mathrm{Im}\,\gamma_2$

$(A-\lambda_2 E)\gamma_2 = 0$

```
>> [T J]=eig(A)

T =

  0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   1.0000 + 0.0000i
  0.8165 + 0.0000i   0.8165 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
  0.4082 - 0.4082i   0.4082 + 0.4082i   0.0000 + 0.0000i

J =

  2.0000 + 1.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
  0.0000 + 0.0000i   2.0000 - 1.0000i   0.0000 + 0.0000i
  0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -3.0000 + 0.0000i
```

↗ за комплексне нам eig даје мало другачије од оног што желимо

$\lambda_3 = \overline{\lambda_2} \Rightarrow \gamma_3 = \overline{\gamma_2}$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix}1 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix}0 \\ 2 \\ 1-i\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 \\ 2 \\ 1\end{bmatrix}}_{\mathrm{Re}\,\gamma_2} + i\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ -1\end{bmatrix}}_{\mathrm{Im}\,\gamma_2}$$

$$T = \begin{bmatrix}\gamma_1\downarrow & \mathrm{Re}\,\gamma_2\downarrow & \mathrm{Im}\,\gamma_2\downarrow\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$A = T\cdot\dot{J}\cdot T^{-1}$

провера:

```
>> J=[-3 0 0; 0 2 1; 0 -1 2]

J =

    -3     0     0
     0     2     1
     0    -1     2

>> T=[1 0 0; 0 2 0; 0 1 -1]

T =

     1     0     0
     0     2     0
     0     1    -1

>> T*J*inv(T)

ans =

    -3     0     0
     0     3    -2
     0     1     1
```

↗ * је множење матрица

$A = T\dot{J}T^{-1}$

$$e^{xJ} = \begin{bmatrix} e^{-3x} & \\ & \underbrace{\boxed{e^{x\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}}}}_{2\times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3x} & \\ & \boxed{e^{2x}\cdot R_x} \end{bmatrix}$$

подсетник: $e^{x\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{bmatrix}} = e^{\alpha x}\cdot\begin{bmatrix}\cos(\beta x)&\sin(\beta x)\\-\sin(\beta x)&\cos(\beta x)\end{bmatrix}$

$= e^{\alpha x}\cdot R_{\beta x}$

$$J = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{xJ} = e^{x\begin{bmatrix}B_1 & \\ & B_2\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{xB_1} & 0 \\ 0 & e^{xB_2} \end{bmatrix}$$

блокови

$$J^k = \begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} B_1^k & \\ & B_2^k \end{bmatrix}$$

ОР: $y(x) = e^{xA}\cdot c = Te^{xJ}\underbrace{T^{-1}\cdot c} = Te^{xJ}\cdot c_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{-3x}&0&0\\0&e^{2x}\cos x&e^{2x}\sin x\\0&-e^{2x}\sin x&e^{2x}\cos x\end{bmatrix}\cdot c_1,\qquad c, c_1\in\mathbb{R}^3$

(3) $y' = Ay$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[0 -4; 1 4]

A =

     0    -4
     1     4

>> eig(A)

ans =

    2.0000
    2.0000
```

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$k=2$ – алгебарска вишеструкост

За J имамо 2 могућности: $J = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{2} \end{bmatrix} \vee J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}2&1\\0&2\end{matrix}} \end{bmatrix}$

→ 2 Жорд. бл. (дијагонална)

→ 1 Жорд. бл.

$(A-\lambda_1 E)\gamma_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\cancel{-2a-4b=0}$

$a+2b=0 \Rightarrow a=-2b$

$\gamma_1 = \begin{bmatrix} -2b \\ b \end{bmatrix} \underset{\text{нпр. } b=1}{=} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ → имамо само 1 соп. век.

$\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 E) = \dim\left\{\begin{bmatrix} -2b \\ b \end{bmatrix} \middle| b\in\mathbb{R}\right\} = 1$

$m=1$ – геометријска вишеструкост (увек $m \le k$)

⇓

имамо 1 Жорданов блок

⇓

$$J=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$$

$A=TJT^{-1}$

$T=?$

$$T=\begin{bmatrix}\gamma_1\downarrow & ?\end{bmatrix}$$

γ_2 – други базни вектор, уопштени сопствени вектор

$$(A-\lambda_1E)\gamma_2=\gamma_1$$

$$\begin{bmatrix}-2&-4\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$$

$$\cancel{-2a-4b=-2}$$

$$a+2b=1 \Rightarrow a=1-2b \rightsquigarrow \gamma_2=\begin{bmatrix}1-2b\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\xrightarrow{b=0}\gamma_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}\gamma_1\downarrow & \gamma_2\downarrow\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$e^{xJ}=e^{x(D+N)}=e^{xD}\cdot e^{xN}=\begin{bmatrix}e^{2x}&0\\0&e^{2x}\end{bmatrix}\cdot(E+xN)=e^{2x}\cdot\begin{bmatrix}1&x\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2x}&xe^{2x}\\0&e^{2x}\end{bmatrix}.$$

$$J=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}}_{D}+\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}}_{N}$$

$$D\cdot N=2\cdot E\cdot N=2N=N\cdot 2E=N\cdot D\Rightarrow e^{xJ}=e^{xD}\cdot e^{xN}$$

N – нилпотентна $(\exists k,\ N^k=0)$

$$N^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow e^{xN}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^kN^k}{k!}=\sum_{k=0}^{1}\frac{x^kN^k}{k!}=E+xN$$

ОР: $y(x)=Te^{xJ}\cdot c$, $c\in\mathbb{R}^2$

```
>> jordan(A)

ans =

     2     1
     0     2
```

```
>> [T J]=jordan(A)

T =

    -2     1
     1     0


J =

     2     1
     0     2
```

← даје Жорданову форму J и матрицу преласка T

④ $y'=Ay$

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\1&0&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$$

$K=4$

могућности за J:

$$\begin{bmatrix}\boxed{2}&&&\\&\boxed{2}&&\\&&\boxed{2}&\\&&&\boxed{2}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&1&&\\&2&&\\&&\boxed{2}&\\&&&\boxed{2}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&1&&\\&2&&\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&1&&\\&2&1&\\&&2&\\&&&\boxed{2}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&1&&\\&2&1&\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}$$

$$(A-2E)\gamma=0$$

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\\b\\c\\d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}$$

$\cancel{0=0}$
$c=0$
$\cancel{0=0}$
$a=0$

$$\Rightarrow \gamma = \begin{bmatrix} 0\\b\\0\\d \end{bmatrix} = b\cdot\begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{bmatrix} + d\cdot\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}$$

$$\dim Ker(A-2E) = \dim \left\{ \begin{bmatrix} 0\\b\\0\\d \end{bmatrix} \middle| b,d\in\mathbb{R} \right\} = 2$$

$\Rightarrow m = 2 \Rightarrow 2$ Жорданова блока

$\Downarrow$

$$\begin{bmatrix} 2&1&&\\ &2&&\\ &&2&1\\ &&&2 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 2&1&&\\ &2&1&\\ &&2&\\ &&&2 \end{bmatrix}$$

μ - минимални полином од A

φ - каракт. пол.

$\varphi(\lambda) = \det(A-\lambda E) \Rightarrow \varphi(\lambda) = (\lambda-2)^4$

$\mu \mid \varphi \Rightarrow \mu = (\lambda-2)^k, \ k\le 4$

$(A-2E)^1 \neq 0$

$(A-2E)^2 = 0 \Rightarrow \mu(\lambda) = (\lambda-2)^2 \Rightarrow \deg\mu = st\,\mu = 2 \Rightarrow$ ред највећег Жордановог блока је 2

$\Downarrow$

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}2&1\\&2\end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix}2&1\\&2\end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{B} & 0 \\ 0 & \boxed{B} \end{bmatrix}$$

$$e^{xJ} = \begin{bmatrix} e^{xB} & \\ & e^{xB} \end{bmatrix} = e^{2x}\cdot\begin{bmatrix} 1&x&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&x\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2&1\\0&2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{xB} = e^{2x}\cdot\begin{bmatrix} 1&x\\0&1 \end{bmatrix}$$

2 сопс. век $\xleftrightarrow{m=2}$ 2 Жорд. бл.

сваки сопс. век $\longleftrightarrow$ 1 Жорд. блок

$T = ?$

сопс. век: $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}$

$$J = \begin{bmatrix} 2&1&&\\ &2&&\\ &&2&1\\ &&&2 \end{bmatrix}$$

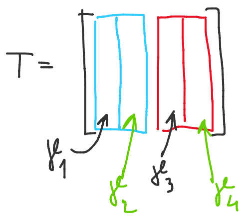
$\Downarrow$

γ_2 - припојени за γ_1:

$(A-2E)\gamma_2 = \gamma_1$

$0=0$
$c=1$
$0=0$
$a=0$

$$\to \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0\\b\\1\\d \end{bmatrix} \xrightarrow{b=d=0} \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{bmatrix}$$



γ_4 - придружени за γ_3:

$$(A-2E)\gamma_4=\gamma_3$$

$$\begin{aligned} 0&=0\\ c&=0\\ 0&=0\\ a&=1 \end{aligned} \rightarrow \gamma_4=\begin{bmatrix}1\\b\\0\\d\end{bmatrix} \xrightarrow{b=d=0} \gamma_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}\gamma_1\downarrow & \gamma_2\downarrow & \gamma_3\downarrow & \gamma_4\downarrow\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$(\det T\neq 0)$

↳ проверити, зер мора бити инвертибилна

```
>> A=[2 0 0 0; 0 2 1 0; 0 0 2 0; 1 0 0 2]

A =

     2     0     0     0
     0     2     1     0
     0     0     2     0
     1     0     0     2

>> [T J]=jordan(A)

T =

     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     1     0     0     0


J =

     2     1     0     0
     0     2     0     0
     0     0     2     1
     0     0     0     2
```

ОР: $y(x)=e^{xA}\cdot c=Te^{xJ}\cdot c_1$, $c, c_1\in\mathbb{R}^4$