① Нека је $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}\in M_n(\mathbb{R})$ таква да је $a_{ij}\geq 0,\ \forall i\neq j$. Нека је $B=e^A=[b_{ij}]_{i,j=1}^{n}\in M_n(\mathbb{R})$. Доказати $b_{ij}\geq 0, \forall i,j$.

$$A=\begin{bmatrix} \ddots & & \geq 0 \\ & i=j & \\ \geq 0 & & \ddots \end{bmatrix} \rightsquigarrow B=e^A=\begin{bmatrix} & & \\ & \geq 0 & \\ & & \end{bmatrix}$$

(#) Ако $a_{ij}\geq 0, \forall i,j \Rightarrow \frac{A^k}{k!}$ има све ненегативне елементе $\Rightarrow$ и њихова сума такође

$$B=e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} \Rightarrow b_{ij}\geq 0, \forall i,j$$

$A=A_1+D$ ← дијагонална

↳ сви ел. ≥ 0

пр.
$$\begin{bmatrix} -11 & & & \geq 0 \\ & 7 & & \\ & & 3 & \\ \geq 0 & & & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & & & \geq 0 \\ & 18 & & \\ & & 14 & \\ \geq 0 & & & 9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -11 & & & \\ & -11 & & \\ & & -11 & \\ & & & -11 \end{bmatrix}$$

$+11$

$$M=\max_{1\leq j\leq n}|a_{jj}|$$

$$D=\begin{bmatrix} -M & & \\ & -M & \\ & & \ddots \ \ -M \end{bmatrix}=-ME \quad , A_1=A-D=A+ME=[c_{ij}]_{i,j=1}^{n}$$

$$c_{ij}=\begin{cases} \overset{\geq 0}{a_{ij}} & , i\neq j \\ \underbrace{a_{ii}+M}^{}_{}\overset{\geq 0}{} & , i=j \end{cases} \geq 0$$

$$a_{ii}+M=a_{ii}+\max_{1\leq j\leq n}|a_{jj}| \underset{j=i}{\geq} a_{ii}+|a_{ii}|\geq 0$$

$$A_1D=A_1(-ME)=-MA_1=(-ME)A_1=DA_1$$

$\Downarrow$ (2)

$$B=e^A=e^{A_1+D}=e^{A_1}\cdot e^D=e^{A_1}\cdot e^{-M}\cdot E=e^{-M}\cdot e^{A_1}$$

$\left.\begin{array}{l} e^{-M}\geq 0 \\ e^{A_1} \text{ има ненег. ел} \\ \quad (\#) \end{array}\right\} \Rightarrow b_{ij}\geq 0, \forall i,j$

$$e^D=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-ME)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-M)^k\cdot E}{k!}=e^{-M}\cdot E$$

$$e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ME)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-M)^k \cdot E}{k!} = e^{M} \cdot E$$

(2) Нека је $\lambda \in \mathbb{C}$ сопствена вредност матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$. Доказати да је e^{λ} сопствена вредност за e^A.

I начин $\quad \exists v \neq 0, \ Av = \lambda v$

Хоћемо $\exists v_1 \neq 0, \ e^A v_1 = e^{\lambda} v_1$. Уздатамо $v_1 = v$.

$$e^A v = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) \cdot v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k v}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k v}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right) v = e^{\lambda} v$$

$$A^k v = A^{k-1}(Av) = A^{k-1}(\lambda v) = \lambda A^{k-1} v =$$
$$= \lambda A^{k-2}(Av) = \lambda A^{k-2}(\lambda v) = \lambda^2 A^{k-2} v =$$
$$= \dots = \lambda^{k-1} A v = \lambda^k v$$

$\Rightarrow e^{\lambda}$ је сопс. вр. од e^A (и то за исти сопс. век. v)

II начин $\quad \det(A - \lambda E) = 0$

$$\det(e^A - e^{\lambda} E) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} E\right) \overset{(*)}{=} \det\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k - \lambda^k E}{k!}\right) =$$

$k=0$: $\frac{A^0}{0!} = E, \quad \frac{\lambda^0 \cdot E}{0!} = E$

$$\overset{(*)}{=} \det\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k - (\lambda E)^k}{k!}\right) =$$

$\lambda^k E = \lambda^k E^k = (\lambda E)^k$

$$= \det\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{A^k - (\lambda E)^k}{k}\right) =$$

$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ непр.

$A_N \to A_\infty \Rightarrow \det A_N \to \det A_\infty$

$\det(\underbrace{\lim_{N\to\infty} A_N}_{A_\infty}) = \lim_{N\to\infty} \det A_N$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{N\to\infty} \det\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{A^k - (\lambda E)^k}{k!}\right) =$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{N\to\infty} \det\left(\sum_{k=1}^{N} (A - \lambda E) \cdot \frac{A^{k-1} + \lambda A^{k-2} + \dots + \lambda^{k-1} E}{k!}\right) =$$

M_N

$A^k - B^k = (A^{k-1} + A^{k-2}B + \dots + B^{k-1})$

A, B комутирају

$(A \cdot \lambda E = \lambda E \cdot A)$

$$= \lim_{N\to\infty} \det\left((A - \lambda E) \cdot M_N\right) =$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{N\to\infty} \left(\underbrace{\det(A - \lambda E)}_{0} \cdot \det(M_N)\right) =$$

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

$$= \lim_{N\to\infty} 0 = 0.$$

$Y' = AY \quad , A \in M_n(\mathbb{R})$

ОР: $Y(x) = e^{xA} \cdot C \quad , C \in \mathbb{R}^n$

③ Решити систем ДЈ $Y' = AY$ одређивањем матрице e^{xA} у облику степеног реда, ако је:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ в) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

а) $A^k = ?$

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!}$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

индукцијом: $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

БАЗА $k=1$: $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

$k=0$: $A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

КОРАК: $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad ; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = xe^x$$

ОР: $Y(x) = e^{xA} \cdot C = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix} \cdot C, \ C \in \mathbb{R}^2$

б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -E \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-E) = E$$

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l} \cdot A^{2l}}{(2l)!} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1} \cdot A^{2l+1}}{(2l+1)!} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l} \cdot (-1)^l \cdot E}{(2l)!} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1} \cdot (-1)^l \cdot A}{(2l+1)!} =$$

$$= \cos x \cdot E + \sin x \cdot A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l}(-1)^l}{(2l)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \cos x$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}(-1)^l}{(2l+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sin x$$

$k = 4r + t \quad , t \in \{0,1,2,3\}$

$$A^k = A^{4r+t} = (A^4)^r \cdot A^t = E^r \cdot A^t = A^t$$

$$A^k = \begin{cases} E, & k \equiv_4 0 \\ A, & k \equiv_4 1 \\ -E, & k \equiv_4 2 \\ -A, & k \equiv_4 3 \end{cases} = \begin{cases} (-1)^l E, & k = 2l, \ l \in \mathbb{N}_0 \\ (-1)^l A, & k = 2l+1, \ l \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$$\text{ОР}: \ y(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}}_{R_x} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

R_x → матрица ротације у равни за угао x

в) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

$A^2 = \ldots$

$A^3 = \ldots$ ← тешко

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}}_{P} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}}_{Q} = a \cdot E + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P \cdot Q = a \cdot E \cdot Q = aQ = Q \cdot aE = Q \cdot P$$

$$e^{xA} = e^{x(P+Q)} = e^{xP + xQ} \overset{(2)}{=} e^{xP} \cdot e^{xQ} = e^{ax} \cdot E \cdot e^{bx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{б)}{=} e^{ax} \cdot R_{bx}$$

$$e^{xP} = e^{xaE} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k E}{k!} = e^{ax} \cdot E$$

$$\text{ОР}: \ y(x) = e^{ax} \cdot \begin{bmatrix} \cos(bx) & \sin(bx) \\ -\sin(bx) & \cos(bx) \end{bmatrix} \cdot c, \ c \in \mathbb{R}^2$$

Метода дијагонализације

$Y' = AY \rightsquigarrow e^{xA}$

$A \sim J$

$A = T \cdot J \cdot T^{-1}$

J - у Жордановој нормалној форми

T - матрица промене базе

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_k} \end{bmatrix}$$

блокови

→ блок-дијагонална матрица

B_m су облика:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

, где је $\lambda \in \mathbb{R}$ сопс. вр. матрице A , специјално се десити $[\lambda] \to$ дијагонална

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} \boxed{R} & \boxed{E} & & \\ & \boxed{R} & \ddots & \\ & & \ddots & \boxed{E} \\ & & & \boxed{R} \end{bmatrix}$$

, где су $R = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2\times 2}$ и $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

и $a \pm ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ сопс. вр. матрице A $(a, b \in \mathbb{R})$

$A = T \cdot J \cdot T^{-1}$

ОР: $y(x) = e^{xA} \cdot c = e^{xTJT^{-1}} \cdot c = T \cdot \boxed{e^{xJ}} \cdot T^{-1} \cdot c$

Зад. 4 од пр. часа

знамо да нађемо