Понедељак 12.04.2021.

(1) Наћи ток $\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= x^2 + y \end{aligned}$

Ток: $\phi^t(x)$ за век. поље F

$$\frac{d\phi^t(x)}{dt} = F(\phi^t(x)), \quad \phi^0 = id$$

$$x = c_1 e^{-t}$$

$$y' = c_1^2 e^{-2t} + y \quad \text{(лин. јна.)}$$

$$y = c_2 e^t - \frac{c_1^2}{3} e^{-2t}$$

$$x(0) = x_0 \Rightarrow c_1 = x_0$$

$$y(0) = y_0 \Rightarrow c_2 - \frac{x_0^2}{3} = y_0 \Rightarrow c_2 = y_0 + \frac{x_0^2}{3}$$

$$\phi^t(x,y) = \left(x e^{-t}, \; y e^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})\right)$$

(2) Наћи ток за векторско поље $F(x,y,z) = (5x+4y+2z, \; 4x+5y+2z, \; 2x+2y+2z)$

$$\phi^t(x,y,z) = (\varphi_1(x,y,z), \varphi_2(x,y,z), \varphi_3(x,y,z))$$

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= 5\varphi_1 + 4\varphi_2 + 2\varphi_3 \\ \varphi_2' &= 4\varphi_1 + 5\varphi_2 + 2\varphi_3 \\ \varphi_3' &= 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + 2\varphi_3 \end{aligned} \qquad \varphi' = A\varphi$$

$$\vdots$$

(3) Доказати да је $\phi^t(x) = e^{tA} \cdot x$ ток за ЛСДЈКК $x' = Ax$. $(F(x) = A \cdot x)$

$$\frac{d\phi^t(x)}{dt} = \frac{d(e^{tA} \cdot x)}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{tA}) \cdot x = A \cdot e^{tA} \cdot x = A \cdot \phi^t(x) = F(\phi^t(x)) \quad \checkmark$$

$$\phi^0(x) = e^{0A} \cdot x = E \cdot x = x \quad \checkmark$$

<u>Еквивалентност система</u>

Нека су дате области $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$ и $X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $Y : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^n$ глатка векторска поља на њима. Кажемо да су фазни токови ϕ^t и ψ^t дефинисани једначинама

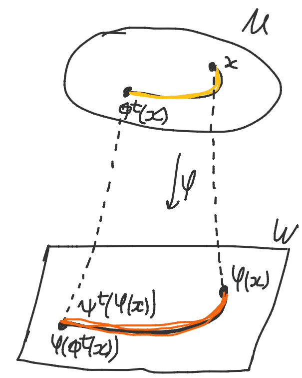
$$\frac{d\phi^t}{dt} = X(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{Id}$$
$$\frac{d\psi^t}{dt} = Y(\psi^t), \quad \psi^0 = \mathrm{Id}$$

конјуговани или *еквивалентни* ако постоји бијекција

$$\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$$

таква да важи

$$\varphi \circ \phi^t = \psi^t \circ \varphi.$$



Ако је још и:

Л • φ линеарно, кажемо да су токови ϕ^t и ψ^t *линеарно еквивалентни*;
Т • φ хомеоморфизам, кажемо да су токови ϕ^t и ψ^t *тополошки еквивалентни*;
Д • φ дифеоморфизам, кажемо да су токови ϕ^t и ψ^t *диференцијално еквивалентни*.

Користићемо термин еквивалентни и за саме системе, а не само за токове.

рел. еквив!

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "\phi^t"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{U} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathcal{W} \arrow[r, "\psi^t"'] & \mathcal{W} \end{tikzcd}$$

φ лин, $\varphi(ax+by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$

φ хомео, φ, φ^{-1} непрекидне

φ дифео, φ, φ^{-1} диференцијабилне

$\boxed{\text{линеарно} \Rightarrow \text{диф.} \Rightarrow \text{топ.}}$

Теореме за ЛСДЈКК ($X' = AX$, $X' = BX$):

1) Л $\Leftrightarrow$ Д, $\Rightarrow$ Т

2) лин. еквив. акко су A и B сличне

контр. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ($2 \pm i$) и $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($2, 1$)

3) A, B хиперболичке матрице ($Re(\lambda) \neq 0$, λ - сопс. вр.)

системи су топ. еквив. $\Leftrightarrow$ $m_+(A) = m_+(B)$

↳ број сопс. вр. λ т.д. $Re(\lambda) > 0$

4 Доказати да системи $\begin{matrix} x' = x \\ y' = y \end{matrix}$ и $\begin{matrix} x' = x \\ y' = x + y \end{matrix}$ нису лин. еквив. иако имају исте сопс. вр.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\qquad$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

ПП јесу екв. $\Rightarrow A \sim B \Rightarrow \exists P \in GL_2(\mathbb{R})$, $A = PBP^{-1}$

$$P^{-1}AP = B \overset{A=E}{\Longrightarrow} P^{-1}P = B$$
$$E = B$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \;\lightning$$

$x' = -x \qquad x' = -x$

⑤ Доказати да су системи $\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= x^2+y \end{aligned}$ и $\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y \end{aligned}$ диф. еквив., али нису лин. еквив.

Шта су токови: $\phi^t(x,y) = \left(xe^{-t},\ ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})\right)$, $\psi^t(x,y) = e^{t\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (xe^{-t}, ye^t)$

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$

$$\varphi \circ \phi^t(x,y) = \psi^t(\varphi(x,y))$$

$$\varphi\left(xe^{-t},\ ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})\right) = \left(\varphi_1(x,y)e^{-t},\ \varphi_2(x,y)e^t\right)$$

Л ⇒ Д, неће помоћи, јер нису лин. еквив.: $\varphi(x,y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$

$$\alpha x e^{-t} + \beta y e^t + \frac{\beta x^2}{3}(e^t - e^{-2t}) = \varphi_1(x,y)e^{-t} \quad / \cdot e^t$$

$$\gamma x e^{-t} + \delta y e^t + \frac{\delta x^2}{3}(e^t - e^{-2t}) = \varphi_2(x,y)e^t \quad / \cdot e^{-t}$$

$$\varphi_1(x,y) = \alpha x + \beta y e^{2t} + \frac{\beta x^2}{3}(e^{2t} - e^{-t}) \quad / \frac{d}{dt}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\varphi_1(x,y) = 2\beta y e^{2t} + \frac{\beta x^2}{3}(2e^{2t} + e^{-t}) \qquad , \forall t, x, y$$

$$\Rightarrow \beta = 0$$

$$\gamma x e^{-2t} + \delta y + \frac{\delta x^2}{3}(1 - e^{-3t}) = \varphi_2(x,y) \quad / \frac{d}{dt}$$

$$0 = -2\gamma x e^{-2t} + \delta x^2 e^{-3t} \qquad , \forall t, x$$

$$\Rightarrow \gamma = \delta = 0$$

$\varphi(x,y) = (\alpha x, 0)$ – линеарно

није бијекција! $\varphi(-,-) = (0,1)$ ✗

Јесу диф. еквив.:

$$\varphi\left(xe^{-t},\ ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})\right) = \left(\varphi_1(x,y)e^{-t},\ \varphi_2(x,y)e^t\right)$$

$$\| $$

$$\left(\varphi_1(xe^{-t}, —),\ \varphi_2(xe^{-t}, —)\right)$$

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ – набадамо

$\varphi_1(x,y) = x$

$$\varphi_1(xe^{-t}, —) = \varphi_1(x,y)e^{-t} = xe^{-t} \quad ✓$$

$$\varphi_2\left(xe^{-t},\ ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})\right) = \varphi_2(x,y)e^t = ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t}) + \frac{x^2 e^{-2t}}{3} = ye^t + \frac{x^2}{3}e^t = \left(y + \frac{x^2}{3}\right)e^t \quad ✓$$

$$\varphi_2\left(xe^{-t},\ ye^t+\frac{x^2}{3}(e^t-e^{-2t})\right)=\varphi_2(x,y)e^t = ye^t+\frac{x^2}{3}(e^t-e^{-2t})+\frac{x^2e^{-2t}}{3}=ye^t+\frac{x^2}{3}e^t=\left(y+\frac{x^2}{3}\right)e^t \ \checkmark$$

$$\varphi_2(x,y)=y+\frac{x^2}{3}$$

$$\varphi(x,y)=\left(x,\ y+\frac{x^2}{3}\right)$$

φ дифео?

1–1: $\varphi(x_1,y_1)=\varphi(x_2,y_2)$

$$\left(x_1,\ y_1+\frac{x_1^2}{3}\right)=\left(x_2,\ y_2+\frac{x_2^2}{3}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{array}$$

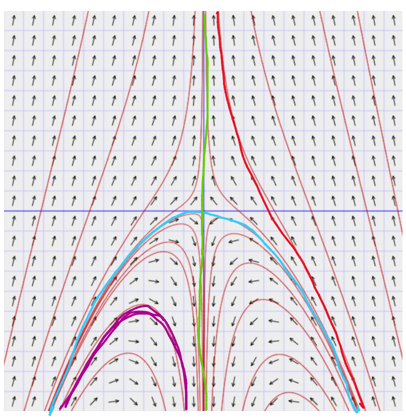
НА: $\varphi(x,y)=(s,t)$

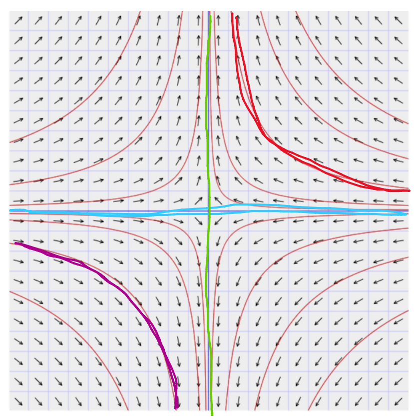
$$\left.\begin{array}{l} x=s \\ y+\frac{x^2}{3}=t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=s \\ y=t-\frac{s^2}{3} \end{array} \qquad \varphi\left(s,t-\frac{s^2}{3}\right)=(s,t)$$

$$\varphi^{-1}(s,t)=\left(s,\ t-\frac{s^2}{3}\right)$$

φ и φ^{-1} диф? — јесу, јер су полиноми $\left(d\varphi(x,y)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3}x & 1 \end{bmatrix},\ d(\varphi^{-1})(s,t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3}s & 1 \end{bmatrix} \right)$

$\Rightarrow$ системи су диф. еквив.





$\varphi(0,y)=(0,y)$

$\varphi(x,0)=\left(x,\frac{x^2}{3}\right)$

⑥ Да ли су топ. еквив. $X'=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A}X$ и $X'=\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{B}X$?

$\lambda_{1/2}=\pm i$ $\qquad$ $\lambda_{1/2}=2\pm i$

$\mathrm{Re}(\pm i)=0 \Rightarrow A$ није хиперболична $\Rightarrow$ не може Т

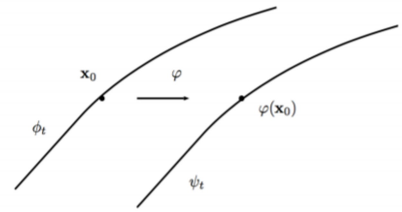
$\mathrm{Re}(\pm i) = 0 \Rightarrow A$ није хиперболична $\Rightarrow$ не може Т

Напомена 122. Ако са $\gamma_{\phi^t}(\mathbf{x})$ означимо трајекторију тачке $\mathbf{x}$:

$$\gamma_{\phi^t}(\mathbf{x}) := \{\phi^t(\mathbf{x}) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

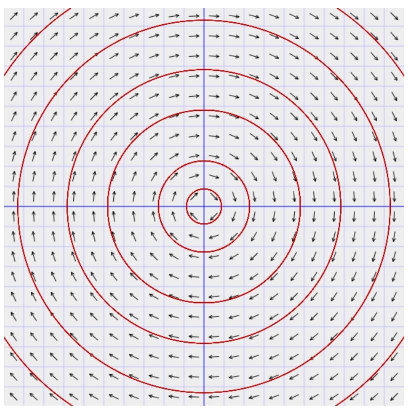
тада је очигледно да, за еквивалнтне токове ϕ^t и ψ^t, бијекција φ слика трајекторију тачке $\mathbf{x}$ на трајекторију тачке $\varphi(\mathbf{x})$:

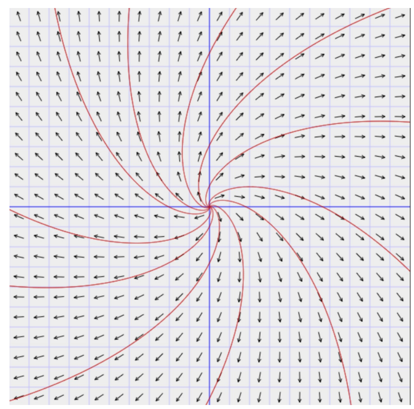
$$\varphi(\gamma_{\phi^t}(\mathbf{x})) = \gamma_{\psi^t}(\varphi(\mathbf{x})).$$



То користимо у задатку!

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$





ФТ су кругови $\qquad$ ФТ краци спирале

ППС јесу топ.-екв. $\Rightarrow \varphi$-хомео $\Rightarrow \varphi(O) =)$ $\Rightarrow O \approx)$

O је компактан, $)$ није компактан ↯

[Или: лево су ФТ периодичне, а десно нису]

Теорема 136. (Хартмен[2]-Гробман[3]) *Нека је $F(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$ и нека је $A = dF(\mathbf{x}_*)$ хиперболичка матрица. Тада постоји околина $\mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$ на којој су токови система*

$$\underbrace{\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})}_{(*)} \quad и \quad \mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

тополошки еквивалентни. □

$\hookrightarrow$ линеаризација система $(*)$

$F(x_*) = 0$ – еквилибријум система

$F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$$A = dF(x_*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_*) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_*) \end{bmatrix}$$

⑦ Доказати да су системи $\begin{aligned} x' &= \sin x + x + y \\ y' &= x + y \end{aligned}$ $(*)$ и $\begin{aligned} x' &= 2021x + y \\ y' &= x + y \end{aligned}$ $(\#)$ топ. еквив. на неком подскупу од $\mathbb{R}^2$.

$F(x,y) = (\sin x + x + y, x + y)$

$F(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow \sin x_0 + x_0 + y_0 = x_0 + y_0 = 0$

$\Rightarrow \sin x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$y_0 = -x_0 = -k\pi$

еквил.: $\{(k\pi, -k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

пр. $k = 0$, $X_* = (0,0)$.

$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X$ $(@)$

$dF(x,y) = \begin{bmatrix} \cos x + 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = dF(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$

$\lambda_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow A$ је хиперб.

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$\Rightarrow m_+(A) = 2$

ТХГ $\Rightarrow$ систем $(*)$ је (топ.) екв. $(@)$ у некој околини U од $(0,0)$

$(@)$ и $(\#)$ топ. екв?

$(\#)$ $B = \begin{bmatrix} 2021 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(B - \lambda E) = 0$

$(2021 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 = 0$

$\lambda^2 - 2022\lambda + 2020 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= \frac{2022 \pm \sqrt{2022^2 - 4 \cdot 2020}}{2} \\ \sqrt{2022^2 - 4 \cdot 2020} &< \sqrt{2022^2} = 2022 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_2, \lambda_1 > 0$$

$\Downarrow$

$m_+(B) = 2$

$m_+(A) = m_+(B) \Rightarrow (\#)$ и $(@)$ топ. екв.

$\Rightarrow (*)$ и $(\#)$ топ. екв. на U