Понедељак 15.03.2021.

$$i \to 0+1i \Rightarrow \begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=1\end{matrix} \qquad \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$$

1) $X' = AX$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(A-\lambda E)=0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \lambda_{3/4} = \pm i \quad , k=2$

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}} \\ & \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}} \end{bmatrix} \vee D = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}} \\ & \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = i \rightsquigarrow \gamma_1 \ , \quad (A-iE)\gamma_1 = 0 \rightsquigarrow \gamma_1 = \begin{bmatrix}0\\-i\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} + i\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Пошто је $\dim_{\mathbb{C}}(\ker(A-\lambda_1 E)) = 1 \Rightarrow$ имамо још и уопштени сопствени вектор и $D$ није блок-дијагонална, већ има 1 (велики) Жорданов блок

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Да смо добили $\dim_{\mathbb{C}}(\ker(A-\lambda_1 E)) = 2$, тј. имамо 2 сопс. век. $\gamma_1, \gamma_2$, онда

$$D = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\gamma_1 & \mathrm{Im}\,\gamma_1 & \mathrm{Re}\,\gamma_2 & \mathrm{Im}\,\gamma_2 \end{bmatrix}$$

Тражимо уопштени с.в. за $\gamma_1$: $\quad (A-\lambda_1 E)\gamma_2 = \gamma_1$

$$\begin{bmatrix} -1-i & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -i & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1-i & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-i\\0\\1\end{bmatrix}$$

$(-1-i)a - c = 0$

$a - ib + c + d = -i \longrightarrow -ia - ib + d = -i \ /\cdot i \Rightarrow a + b + id = 1$

$c = (-1-i)a$

$2a + (1-i)c = 0$

$((1-i)(-1-i) = -1-i+i+i^2 = -2)$

$a - b - id = 1 \longrightarrow a - b - id = 1$

$b + id = 0 \Rightarrow b = -id$

$a = 1 \Rightarrow c = -1-i$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix}1\\-id\\-1-i\\d\end{bmatrix} \overset{d=0}{=} \begin{bmatrix}1\\0\\-1-i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + i\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -id \\ -1-i \\ d \end{bmatrix} \overset{d=0}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1-i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\gamma_1 & \mathrm{Im}\,\gamma_1 & \mathrm{Re}\,\gamma_2 & \mathrm{Im}\,\gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tD} = e^{t\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}} = e^{t\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}}_{(1)} \cdot e^{t\begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(2)} = \begin{bmatrix} R_t & 0 \\ 0 & R_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2 & tA_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_t & tR_t \\ 0 & R_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & t\cos t & t\sin t \\ -\sin t & \cos t & -t\sin t & t\cos t \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$D = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}}_{(1)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(2)}$ и оне комутирају:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_1A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_2A_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1)\ e^{t\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{tA_1} & 0 \\ 0 & e^{tA_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_t & 0 \\ 0 & R_t \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$

$$e^{tA_1} = R_t = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$(2)\ e^{t\begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = E_4 + t \cdot \begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & t \cdot A_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]_{4\times 4}$$

$$\text{ОР}: X(t) = e^{tA} \cdot c = P e^{tD} \cdot c_1, \quad c, c_1 \in \mathbb{R}^4$$

② Још један начин за: $\lambda$ с.вр. од $A \Rightarrow e^{\lambda}$ с.вр. од $e^A$

$$\det(e^A - e^{\lambda}E) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \cdot E\right) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^k - \lambda^k E)\right) =$$

det је непр. пресликавање: $M_n \to M_\infty \Rightarrow \det(M_n) \to \det(M_\infty)$

$k=0: \frac{1}{0!}(A^0 - \lambda^0 E) = (E-E) = 0$

$$= \det\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(A^k - \lambda^k E)\right) = \lim_{n\to\infty} \det\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(A^k - (\lambda E)^k)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \det\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(A-\lambda E)\left(A^{k-1}+\lambda A^{k-2}+\dots+\lambda^{k-2}A+\lambda^{k-1}E\right)\right) =$$

$M_n$

$A^k - B^k = (A-B)(A^{k-1}+A^{k-2}B+\dots+AB^{k-2}+B^{k-1})$

$B=\lambda E$:

$A^k-(\lambda E)^k = (A-\lambda E)(A^{k-1}+\lambda A^{k-2}+\dots)$

$$= \lim_{n\to\infty} \det\left((A-\lambda E)\cdot M_n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \boxed{\overset{=0}{\det(A-\lambda E)}}\cdot \det M_n =$$

$\det(A-\lambda E)=0$, јер је $\lambda$ с.вр. за $A$

$$= \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$\Rightarrow e^{\lambda}$ је сопс. вр. за $e^{A}$

## Фундаментална матрица

$$X'(t) = A(t)\cdot X(t)$$

има опште решење: $X(t) = \Phi(t)\cdot c$, $c\in\mathbb{R}^n$, за неко $\Phi(t)$

↳ $\Phi(t)$ је фундаментална матрица система

$$\Phi(t) = \left[x_1(t)\downarrow \quad x_2(t)\downarrow \quad \dots \quad x_n(t)\downarrow\right]$$

, свако $x_n(t)$ је решење једначине

$$\Phi'(t) = A(t)\cdot\Phi(t)$$

и они су линеарно независни

$$\det\Phi(t) = W(t) \neq 0$$

↳ Вронскијан

Дакле, матрица $\Phi(t)$ је фунд. акко:

1) $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$
2) $W(t) = \det\Phi(t) \neq 0$

пр. Ако имамо ЛСДЈКК $X'=AX$, једна фундаментална матрица је $\Phi(t)=e^{tA}$.

1) $\Phi'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) \overset{(5)}{=} A e^{tA} = A\cdot\Phi(t)$
2) $\det(\Phi(t)) = \det\left(e^{tA}\right) \overset{(6)}{=} e^{\mathrm{tr}(tA)} \neq 0$

## Нехомогени системи

$$X'(t) = A(t)\cdot X(t) + B(t)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

$B\equiv 0$ – хомоген

$B\not\equiv 0$ – нехомоген

Формула за ОР: $X(t) = \Phi(t)\cdot\left(c + \int \Phi^{-1}(t)\cdot B(t)\,dt\right)$, $\Phi(t)$ – фунд. матр. за хомогени сис.

Извођење: хомогена има ОР: $X(t) = \Phi(t)\cdot c$, $c\in\mathbb{R}^n$

Варијација константе: $c \rightsquigarrow c(t)$

$$X(t) = \Phi(t)\cdot c(t)$$

$$X'(t) = \Phi'(t)\cdot c(t) + \Phi(t)\cdot c'(t)$$

$$X'(t) = A(t)\cdot X(t) + B(t) \Rightarrow \underbrace{\Phi'(t)}_{\Phi' = A\Phi}\cdot c(t) + \Phi(t)\cdot c'(t) = A(t)\cdot(\Phi(t)\cdot c(t)) + B(t)$$

$$\Rightarrow A(t)\cdot\Phi(t)\cdot c(t) + \Phi(t)\cdot c'(t) = A(t)\cdot\Phi(t)\cdot c(t) + B(t)$$

$$\Phi(t)\cdot c'(t) = B(t) \quad \Big/ \Phi^{-1}(t)\cdot$$

$W(t) \neq 0 \Rightarrow \Phi(t)$ инвертибилно

$$c'(t) = \Phi^{-1}(t)\cdot B(t)$$

$$c(t) = \int \Phi^{-1}(t)\cdot B(t)\,dt + c$$

→ ово је интеграл по компонентама

$$X(t) = \Phi(t)\cdot c(t) = \Phi(t)\left(c + \int \Phi^{-1}(t) B(t)\,dt\right) =$$

$$= \underbrace{\boxed{\Phi(t)\cdot c}}_{\text{опште реш. хомогене}} + \underbrace{\boxed{\Phi(t)\cdot\int \Phi^{-1}(t) B(t)\,dt}}_{\text{партикуларно решење нехомогене}}$$

(3) а) $x_1' = x_2 + \frac{1}{\cos^2 t}$

$x_2' = -x_1 + \operatorname{tg} t$

б) $x_1' = x_1 + x_2 - \cos t$

$x_2' = -2x_1 - x_2 + \sin t + \cos t$

решење: $\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t + \sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix}\cdot c + \begin{bmatrix} -t\cos t \\ t(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}, \; c \in \mathbb{R}^2$

а) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad X' = AX + B$

$B(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos^2 t} \\ \operatorname{tg} t \end{bmatrix}$

$\Phi(t) = ?$ $\quad \Phi(t) = e^{tA} = R_t = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$, $W(t) = \det \Phi(t) = (\cos t)^2 - (\sin t)(-\sin t) = 1$

$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

$\boxed{A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\cdot\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}}$

$$\int \Phi^{-1}(t)\cdot B(t)\,dt = \int \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos^2 t} \\ \operatorname{tg} t \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos t} - \frac{\sin^2 t}{\cos t} \\ \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \sin t \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} \cos t \\ \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \sin t \end{bmatrix} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} \int \cos t\,dt \\ \int \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \sin t\right) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \frac{1}{\cos t} - \cos t \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{-dx}{x^2} = \frac{1}{x} + C = \frac{1}{\cos t} + C$$

$\cos t = x$

$-\sin t\,dt = dx$

$$X_H(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot C, \quad C \in \mathbb{R}^2$$

$$X_p(t) = \Phi(t)\cdot \int \Phi^{-1}(t)\cdot B(t)\,dt = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin t \\ \frac{1}{\cos t} - \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{\cos t \cdot \sin t} + \frac{\sin t}{\cos t} \cancel{- \sin t \cdot \cos t} \\ \cancel{-\sin^2 t} \cancel{+1} \cancel{- \cos^2 t} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{tg} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

OR: $X(t) = X_H(t) + X_p(t)$.