Понедељак 08.03.2021.

Жорданова нормална форма

$$\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \vee \quad B_i = \begin{bmatrix} R & E & & & \\ & R & E & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & E \\ & & & & R \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

у случају да имамо поновљену реалну сопс. вр. $\lambda$

у случају да имамо поновљену комплексну сопс. вр. $\alpha + i\beta$

нпр. $n=4$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}, \quad D - \text{Жорд. форми}, \quad P \in GL(n, \mathbb{R})$$

(1) $X' = AX$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$

$k = 4$ – алгебарска вишеструкост

$(A - 2E)\gamma = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = 0 \\ c = 0 \\ 0 = 0 \\ a = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{bmatrix} = b \cdot \overset{= \gamma_1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + d \cdot \overset{= \gamma_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

највише 2 лин. нез. сопс. век.

$\dim(\mathrm{Ker}(A - 2E)) = 2 \Rightarrow m = 2$ – геометријска вишеструкост

↳ имамо 2 Жорданова блока

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} \quad \vee \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

$\varphi(\lambda) = (\lambda-2)^4 = \det(A-\lambda E)$ – карактеристични полином

$\mu(\lambda) = ?$ – минимални полином

$\mu \mid \varphi \Rightarrow \mu(\lambda) = (\lambda-2)^\ell \quad , \ell \in \{1,2,3,4\}$

$$(A-2E)^1 = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \neq 0$$

$$(A-2E)^2 = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mu(\lambda) = (\lambda-2)^2 \Rightarrow \deg \mu = 2$$

$\Downarrow$

2 је ред највећег Жордановог блока

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & \\ & B \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\gamma_1 \quad ? \quad \gamma_3 \quad ?$

$\gamma_2 \leftarrow \gamma_1$

$\gamma_4 \leftarrow \gamma_3$

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} \underbrace{\boxed{e^{tB}}}_{2\times 2} & \\ & \underbrace{\boxed{e^{tB}}}_{2\times 2} \end{bmatrix} = e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & t \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{ком}} \;\; \underbrace{\phantom{x}}_{N} = 2E + N \quad , N^2 = 0$$

$$e^{tB} = e^{t(2E+N)} = e^{2tE} \cdot e^{tN} = e^{2t} \cdot E \cdot (E + t \cdot N) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

уопштени сопствени вектори за $\gamma_1$ и $\gamma_3$:

$\gamma_2 = ?$

$(A-2E)\gamma_2 = \gamma_1$

$$\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0=0 \\ c=1 \\ 0=0 \\ a=0 \end{matrix} \Rightarrow \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 1 \\ d \end{bmatrix}$$

$\} b = d = 0$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\gamma_4 = ?$

$(A-2E)\gamma_4 = \gamma_3$

$\vdots$

$$\gamma_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

само треба водити рачуна да $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ буду независни

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{array}$$

$$P = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det P \neq 0$$

$$\text{OP}: \ X(t) = e^{tA}\cdot c = P\cdot e^{tD}\cdot \underbrace{P^{-1}\cdot c}_{c_1} = P e^{tD}\cdot c_1, \quad c, c_1 \in \mathbb{R}^4$$

(2) $X' = AX$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$$

$k = 4$

$$(A-2E)\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} = b\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{/\!/\gamma_1} + c\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{/\!/\gamma_2} \Rightarrow m = 2$$

$\Rightarrow$ 2 блока

$A - 2E \neq 0$

$$(A-2E)^2 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ 1 & & & \\ & & & \end{bmatrix} \neq 0$$

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

$(A-2E)^3 = O \Rightarrow \mu(\lambda) = (\lambda-2)^3$, $\deg \mu = 3 \Rightarrow$ највећи блок реда 3

Тражимо уопштене сопст. век: $(A-2E)\gamma_3 = \gamma_1$

$$\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$0 = 0$

$0 = 1$ ✗

$\vdots$

нема уопштених од $\gamma_1 \Rightarrow$ он одговара блоку реда 1

$(A-2E)\gamma_3 = \gamma_2$

$$\ldots = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ d = 1 \\ a = \ldots \end{matrix} \rightsquigarrow \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\gamma_2 \rightsquigarrow \gamma_3 \rightsquigarrow \gamma_4$

$$\gamma_2 \rightsquigarrow \gamma_3 \rightsquigarrow \gamma_4$$

$$\ldots = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0=0 \\ d=1 \\ a=0 \end{matrix} \rightsquigarrow \gamma_3 = \begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{b=c=0} \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

уопштени за $\gamma_3$ : $(A-2E)\gamma_4 = \gamma_3$

$$\begin{matrix} 0=0 \\ 0=0 \\ d=0 \\ a=1 \end{matrix} \rightsquigarrow \gamma_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{b=c=0} \gamma_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \gamma_2\downarrow & \gamma_3\downarrow & \gamma_4\downarrow & \gamma_1\downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det P \neq 0$$

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} \underset{}{\overset{3\times 3}{\boxed{e^{tB}}}} & \\ & \underset{1\times 1}{\boxed{e^{2t}}} \end{bmatrix} = e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} = 2E + \underset{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\underset{\shortparallel}{N}}, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^3 = 0$$

$$e^{tB} = e^{2t} \cdot E \cdot \left(E + tN + \frac{t^2}{2} N^2\right) = e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OP: $X(t) = Pe^{tD} \cdot c, \ c \in \mathbb{R}^4$

③ $X' = AX$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \quad k=3$$

$$(A-2E)\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = a \cdot \overset{\gamma_1}{\overset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}} + b \cdot \overset{\gamma_2}{\overset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}}, \quad m = \dim \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = 2$$

⇒ 2 блока

⇒ једино је могуће $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t}\cdot t & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$P = ?$ Само нам треба још $\gamma_3$ – да ли одговара $\gamma_1$ или $\gamma_2$?

$(A-2E)\gamma_3 = \gamma_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$b+c=1$
$-b-c=0$ ↯
$b+c=0$

$(A-2E)\gamma_3 = \gamma_2$

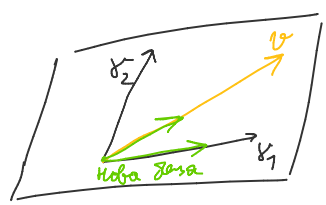
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$b+c=0$
$-b-c=1$ ↯
$b+c=-1$

не одг. ни $\gamma_1$ ни $\gamma_2$ – шта сад?

одабиром $\gamma_1$ и $\gamma_2$ смо направили базу $\mathrm{Ker}(A-2E)$ која нам не одговара

→ мењамо избор $(\gamma_1, \gamma_2)$




$v \in \mathcal{L}\{\gamma_1, \gamma_2\}$ – има уопштени сопствени вектор

бирамо нову базу нпр. $(\gamma_1, v)$

$v = \alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2$ → тражимо, под. има решења.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = v = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\beta \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} b+c=\alpha \\ -b-c=\beta \\ b+c=-\beta \end{matrix} \quad \begin{matrix} \alpha=-\beta=1 \\ c=1-b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \gamma_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1-b \end{bmatrix} \xrightarrow{a=b=0} \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

нова база: $(\gamma_1, v)$, $v = \gamma_1 - \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 1} & \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} v\downarrow & \gamma_3\downarrow & \gamma_1\downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det P \neq 0$$

ОР: $X(t) = P e^{tD} \cdot c, \; c \in \mathbb{R}^3$

④ $X' = AX$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_{3,4} = 1 \pm i$$

$\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 2}$ $\quad k = 2$

1 Жорданов блок $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$m = \dim(\operatorname{Ker}(A - 2E)) = 1, \quad \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ – сопствени

$(A - 2E)\gamma_1 = 0$

уопштени $\quad (A - 2E)\gamma_2 = \gamma_1 \Rightarrow \ldots \; \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

$\underline{\lambda_{3,4} = 1 \pm i}$ $\quad \lambda_3 = 1 + i$

$(A - \lambda_3 E)\gamma_3 = 0$

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1+i \\ -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \qquad 1 + i \longleftrightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \gamma_1\downarrow & \gamma_2\downarrow & \operatorname{Re}\gamma_3 & \operatorname{Im}\gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \det P \neq 0$$

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t}\cdot t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t}\cos t & e^{t}\sin t \\ 0 & 0 & -e^{t}\sin t & e^{t}\cos t \end{bmatrix}$$

OP : $X(t) = Pe^{tD}\cdot c,\ c \in \mathbb{R}^4$