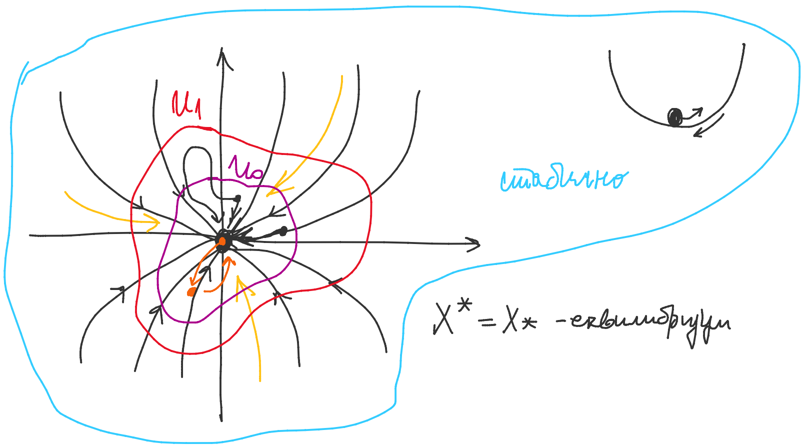
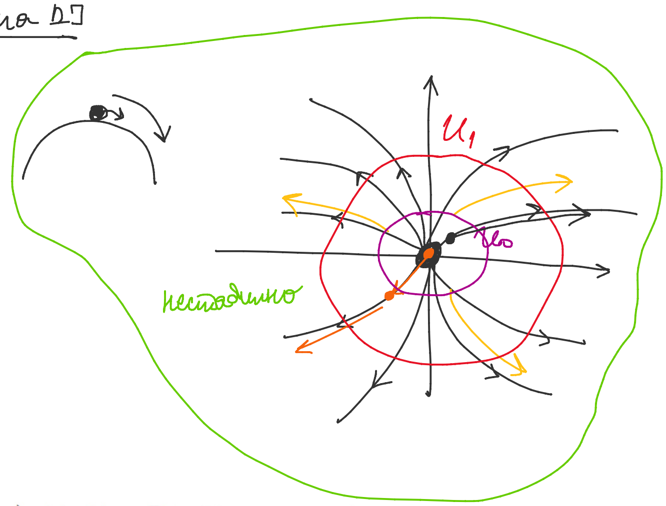
Стабилност еквилибријума ДС





Дефиниција 129. Нека је $\mathbf{x}_*$ еквилибријум система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$. Кажемо да је $\mathbf{x}_*$

- *стабилни еквилибријум* ако за сваку околину $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$ постоји околина $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_0 \ni \mathbf{x}_*$, таква да важи

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{U}_1, \quad t \geq 0,$$

  где је ϕ^t решење система

$$\frac{d\phi^t}{dt} = F(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{Id};$$

$X' = AX$

$\phi^t(x_0) = \phi_t(x_0) = e^{tA} \cdot x_0$

ток

- *асимптотски стабилни еквилибријум* ако је стабилни еквилибријум и ако још важи:

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \phi^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_*;$$

- *нестабилини еквилибријум* ако није стабилни.

1. Скицирати фазне портрете динамичких система, а затим испитати (по деф.) стабилност њихових еквилибријума:

а) $x_1' = -x_1 + 2x_2$, $x_2' = -3x_2$

б) $x_1' = -x_1 + 3x_2$, $x_2' = 5x_1 - 3x_2$

в) $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$.

$X_* = (0,0)$ - једини у сва 3

$X' = AX \Rightarrow \phi^t(x_0) = \boxed{e^{tA}} \cdot x_0$

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\phi^t(x_0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot x_0$, $x_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$

$\mathcal{U}_0 = \mathbb{R}^2$

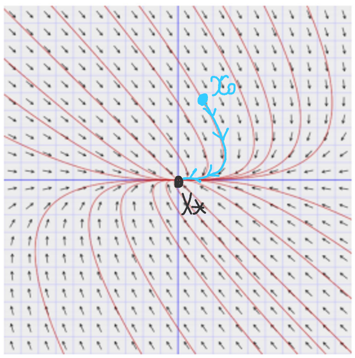
$$\lim_{t\to\infty} \phi^t(x_0) = \lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} a e^{-t} + b(e^{-t} - e^{-3t}) \\ b e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = X_*$$

$e^{-t} \to 0$

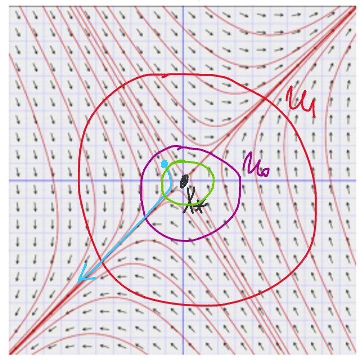
$e^{-3t} \to 0$

$\Rightarrow$ асимптотски стабилен

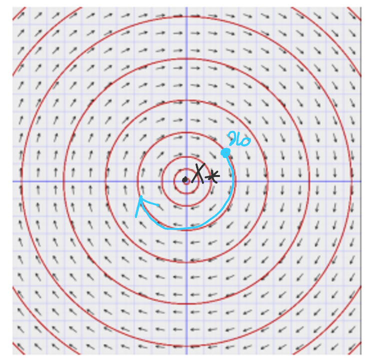
а)



б)



в)

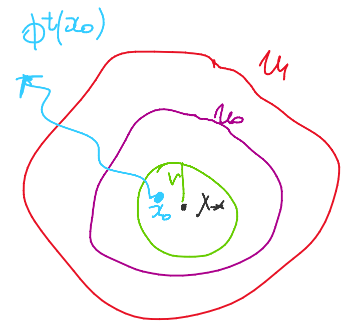


б) $\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = -6$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \phi^t(x_0) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5e^{2t}+3e^{-6t} & 3e^{2t}-3e^{-6t} \\ 5e^{2t}-5e^{-6t} & 3e^{2t}+5e^{-6t} \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$(\exists U_1)(\forall U_0)\ x_0 \in U_0 \wedge \phi^t(x_0) \notin U_1$ (за някое $t \geq 0$) $\Leftrightarrow$ нестабилен



U_1, U_0 – произволни $\qquad (\exists r > 0)\ B(X_*; r) \subseteq U_0$

$U_0 \subseteq U_1$

$$x_0 = \begin{bmatrix} r/2 \\ 0 \end{bmatrix} \in B(X_*; r) \subseteq U_0$$

$$\phi^t(x_0) = \frac{1}{8}\left[\ --\ \right] \cdot \begin{bmatrix} r/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$e^{-6t} \to 0$

$e^{2t} \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \|\phi^t(x_0)\| = \lim_{t\to\infty} \left\| \frac{r}{16}\left(5e^{2t}+3e^{-6t},\ 5e^{2t}-5e^{-6t}\right)\right\| = \infty$$

$\Rightarrow (\exists t \geq 0)\ \phi^t(x_0) \notin U_1 \Rightarrow$ нестабилен

в) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\phi^t(x_0) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot x_0$$

$\lambda_{1/2} = \pm i$

$\|\phi^t(x_0)\| = \|x_0\| \rightarrow$ проверете

U_1 – произв.

$U_0 = B(X_*; r) \subseteq U_1 \qquad x_0 \in U_0 \Rightarrow \phi^t(x_0) \in U_1$?✓ $\Big\}$ стабилен,

$\phi^t(x_0) \in U_0 \subseteq U_1$

$\mathcal{U}_0 = B(X_*; r) \subseteq \mathcal{U}_1$

$x_0 \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \phi^t(x_0) \in \mathcal{U}_1$ ✓

$\phi^t(x_0) \in \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}_1$

$\lim\limits_{t\to\infty} \phi^t(x_0) \neq X_*$

стабилан, али не асимптотски

(T1) **Теорема 140.** *Нека је* $L := dF(\mathbf{x}_*)$ *линеарни оператор такав да је* $\boxed{\operatorname{Re}(\lambda) < 0}$, *за сваку сопствену вредност* λ *и нека је*

$$V(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2,$$

где је $\|\cdot\|$ *норма Љапунова придружена оператору* L *као у Напомени 139. Тада је* V *строга функција Љапунова из тачке (в) Теореме 132, па је* $\mathbf{x}_*$ *асимптотски стабилни еквилибријум система* $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$.

$x' = F(x)$

(T2) **Теорема 142.** *Ако је* $\mathbf{x}_*$ *стабилни еквилибријум, тада не постоји сопствена вредност матрице* $dF(\mathbf{x}_*)$ *чији је реални део строго позитиван.*

$(\exists \lambda)\ \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow X_*$ нестабилан

$F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n, \ \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$F = (F_1, \dots, F_n)$

$$dF(x_*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_*) & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_*) \end{bmatrix} = L$$

2. Испитати стабилност еквилибријума из задатка 1 помоћу (метод теореме Љапунова) о сопственим вредностима.

$X' = AX$, $\underline{F(x) = A \cdot x}$ $\Rightarrow dF(x) = A \Rightarrow dF(x_*) = A \ (= L)$

$\hookrightarrow$ фја линеарна

а) $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -3$, $\operatorname{Re}(-1), \operatorname{Re}(-3) < 0 \overset{T1}{\Rightarrow}$ асимпт. ст.

б) $\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -6$, $\operatorname{Re}(2) > 0 \overset{T2}{\Rightarrow}$ нестабилан

в) $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\operatorname{Re}(i) = \operatorname{Re}(-i) = 0 \Rightarrow$ не знамо из T1 или T2

3. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$x_1' = e^{x_1} - e^{-3x_3} = 0 \Rightarrow e^{x_1} = e^{-3x_3} \overset{1-1}{\Rightarrow} x_1 = -3x_3$$
$$x_2' = 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow 4x_3 = 3\sin(x_1+x_2)$$
$$x_3' = \ln(1 - 3x_1 + x_3), = 0 \Rightarrow 1 - 3x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow 3x_1 = x_3$$

$x_1 = -3(3x_1) = -9x_1$

$\Rightarrow x_1 = x_3 = 0$

$3\sin(x_2) = 0 \Rightarrow \sin x_2 = 0$

$x_2 \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

а затим испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0,0,0)$.

$$X_* \in \{(0, k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$X_* = (0,0,0)$: $\quad F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ $\quad (\mathcal{U} = \{1 - 3x_1 + x_3 > 0\})$, $F = (F_1, F_2, F_3)$

$F_1(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} - e^{-3x_3}$

$F_2(x_1, x_2, x_3) = 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2)$

$F_3(x_1, x_2, x_3) = \ln(1 - 3x_1 + x_3)$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$$dF(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & 3e^{-3x_3} \\ -3\cos(x_1+x_2) & -3\cos(x_1+x_2) & 4 \\ \frac{-3}{1-3x_1+x_3} & 0 & \frac{1}{1-3x_1+x_3} \end{bmatrix}$$

$$L = dF(\underset{(0,0,0)}{\underset{\parallel}{x_*}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_{2/3} = 1 \pm 3i \end{array}$$

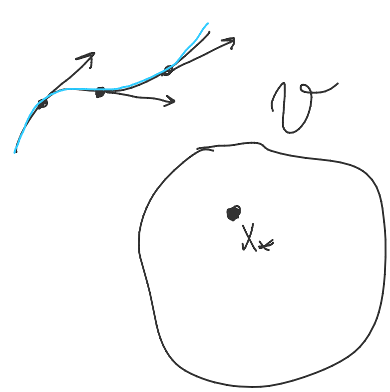
$$\left.\begin{array}{l} Re(\lambda_1) = -3 \\ Re(\lambda_{2/3}) = 1 > 0 \end{array}\right\} \overset{T2}{\Longrightarrow} X_* = (0,0,0) \text{ је нестабилан}$$

У формулацији Теореме Љапунова[1] користићемо традиционалну ознаку $V'(\mathbf{x})$ за извод функције V дуж решења система:

$$V'(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}(V(\phi^t)(\mathbf{x})), \quad \text{за} \quad \frac{d}{dt}\phi^t(\mathbf{x}) = F(\phi^t(\mathbf{x})),\ \phi^0 = \mathrm{Id}.$$

Одавде је

$$V'(\mathbf{x}) = dV(\phi^t(\mathbf{x}))(F(\phi^t(\mathbf{x})) = \boxed{\langle \nabla V(\phi^t(\mathbf{x})), F(\phi^t(\mathbf{x}))\rangle.}$$



Теорема 132. (Теорема Љапунова.) *Нека је $\mathbf{x}_*$ еквилибријум система $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ и нека је функција $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ дефинисана на некој околини $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ тачке $\mathbf{x}_*$, таква да је*

- *V класе C^1 на $\mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$*
- *$V(\mathbf{x}) > 0$ за $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$, $V(\mathbf{x}_*) = 0$.*

Тада ако је

(а) *$\boxed{V'(\mathbf{x}) \leq 0,}$ за $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ (одакле следи да V опада дуж решења система), тада постоји околина тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је свако решење које почиње у тој околини дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\boxed{\mathbf{x}_* \text{ је стабилни еквилибријум;}}$*

(б) *$\boxed{V'(\mathbf{x}) < 0,}$ за $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ (одакле следи да V строго опада дуж решења система), тада постоји околина тачке $\mathbf{x}_*$ таква да је свако решење које почиње у тој околини дефинисано за свако $t \geq 0$; осим тога, $\boxed{\mathbf{x}_* \text{ је асимптотски стабилни еквилибријум;}}$*

свако $t \geq 0$; осим тога, $\boxed{\mathbf{x}_* \text{ је стабилни еквилибријум;}}$

(б) $\boxed{V'(\mathbf{x}) < 0,}$ за $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ *(одакле следи да V строго опада дуж решења система),* *тада постоји околина тачке* $\mathbf{x}_*$ *таква да је свако решење које почиње у тој околини дефинисано за свако* $t \geq 0$; *осим тога,* $\boxed{\mathbf{x}_* \text{ је асимптотски стабилни еквилибријум;}}$

(в) $\boxed{V'(\mathbf{x}) > 0,}$ за $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{x}_*\}$ *(одакле следи да V строго расте дуж решења система),* *тада је* $\boxed{\mathbf{x}_* \text{ нестабилни еквилибријум}}$

Функција V се зове *функција Љапунова.*

4. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$x_1' = (x_3+1)(2x_2 - x_1)$$
$$x_2' = -(x_3+1)(x_1+x_2)$$
$$x_3' = -x_3^3,$$

а затим испитати њихову стабилност.

$$X' = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x_3+1)(2x_2-x_1)=0 \\ -(x_3+1)(x_1+x_2)=0 \\ -x_3^3=0 \quad \Rightarrow x_3=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x_2-x_1=0 \\ x_1+x_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1=x_2=0$$

$$X_* = (0,0,0)$$

$$X_* = (0,0,0)$$

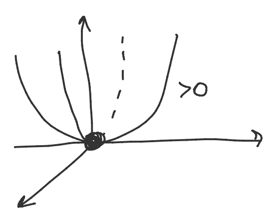
$$dF(x) = \begin{bmatrix} -x_3-1 & 2x_3+2 & 2x_2-x_1 \\ -x_3-1 & -x_3-1 & -x_1-x_2 \\ 0 & 0 & -3x_3^2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow L = dF(x_*) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2/3} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$Re(\lambda_1) = 0$

метода сопс.
вр. не даје одг.

Шст кандидат за V је $\quad V(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$

$a, b, c > 0$



1° V је C^1 ✓

2° $V(0,0,0) = 0$

$V(x) > 0 \quad , x \neq \vec{0}$

3° $\langle \nabla V(x), F(x) \rangle = \langle (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3), ((x_3+1)(2x_2-x_1), -(x_3+1)(x_1+x_2), -x_3^3) \rangle =$

$\nabla V = (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3)$

$= 2ax_1(x_3+1)(2x_2-x_1) - 2bx_2(x_3+1)(x_1+x_2) - 2cx_3^4 =$

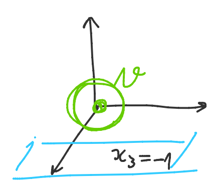
$= (x_3+1)(4ax_1x_2 - 2ax_1^2 - 2bx_1x_2 - 2bx_2^2) - 2cx_3^4$

$= \underbrace{(x_3+1)}_{?\,(>0)} \big(\underbrace{-2ax_1^2 - 2bx_2^2}_{<0} + x_1x_2 \underbrace{(4a-2b)}_{=0}\big) \underbrace{-2cx_3^4}_{<0}$

$4a = 2b \quad , \quad b=2, a=1, c=1$

$\rightarrow \mathcal{V} = B((0,0,0); \tfrac{1}{2})$ ✓

$V(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$



$V' < 0 \underset{\text{ТЛ}}{\Rightarrow} X_* = (0,0,0)$ је АС еквил.

5. Доказати да је координатни почетак стабилан, али не и асимптотски стабилан еквилибријум система $X' = AX$, где је $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0,0)$ система:

а) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_1 x_2^2 \\ -x_2^3 - x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$ б) $X' = AX + \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ x_2^3 + x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$ в) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1 x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$

Показати да је у сва три случаја матрица $dF(\mathbf{0})$ једнака и да метод сопствених вредности не даје одговор.

domaći! (1В)

нпр. а) $X' = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2 \\ x_1 - x_2^3 - x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$

$dF(x) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_1 x_2 \\ 1 - 2x_1 x_2 & -3x_2^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow dF(x_*) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$

$\lambda_{1/2} = \pm i$

(исто б, в)

а) $X' = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2 \\ x_1 - x_2^3 - x_1^2 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$

$V(x_1, x_2) = a x_1^2 + b x_2^2 \quad , a, b > 0$ $\qquad \nabla V(x_1, x_2) = (2a x_1, 2b x_2)$

$$\langle \nabla V(x_1,x_2), F(x_1,x_2) \rangle = \langle (2a x_1, 2b x_2), (-x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2, x_1 - x_2^3 - x_1^2 x_2) \rangle =$$

$$= 2a x_1 (-x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2) + 2b x_2 (x_1 - x_2^3 - x_1^2 x_2) =$$

$$= -2a x_1 x_2 - 2a x_1^4 - 2a x_1^2 x_2^2 + 2b x_1 x_2 - 2b x_2^4 - 2b x_1^2 x_2^2 =$$

$$= 2x_1 x_2 (b - a) \underbrace{- 2x_1^2 x_2^2 (a+b)}_{<0} \underbrace{- 2a x_1^4 - 2b x_2^4}_{<0}$$

$a, b = ?$

$V' \leq 0$, $V' < 0$, $V' > 0$?

$a = b (=1)$: $\qquad V' = -2x_1^2 x_2^2 \cdot 2 - 2x_1^4 - 2x_2^4 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0, \; (x_1, x_2) \neq (0,0)$

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ $\qquad (\mathcal{V} = \mathbb{R}^2)$

- V је C^1 на $\mathcal{V}\setminus\{(0,0)\}$ ✓
- $V>0$ на $\mathcal{V}\setminus\{(0,0)\}$, $V(0,0)=0$ ✓
- $V'<0$ на $\mathcal{V}\setminus\{(0,0)\}$ ✓

$\Rightarrow X_*$ асимптотски стабилан еквилибријум

б) $V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$

$V' = \langle \nabla V, F\rangle = \langle (2x_1,2x_2), (-x_2+x_1^3+x_1x_2^2,\ x_1+x_2^3+x_1^2x_2)\rangle = 2x_1^4+2x_2^4+4x_1^2x_2^2 = 2(x_1^2+x_2^2) > 0$ на $\mathcal{V}\setminus\{x_*\}$ $(\mathcal{V}=\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow$ нест.

в) $V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$

$V' = \dots = 0 \le 0 \Rightarrow$ стабилни еквил.

6. Испитати стабилност положаја равнотеже $X^* = (0,0)$ динамичког система

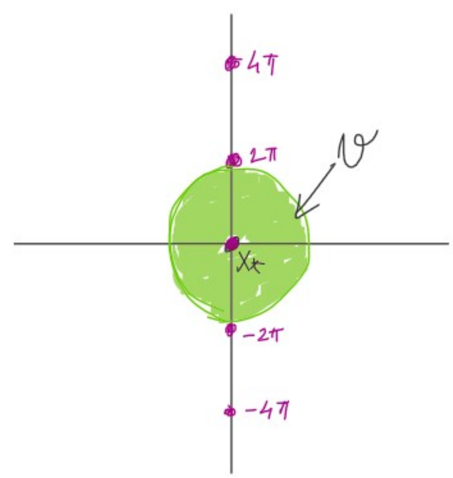
$$x_1' = -\sin x_2$$
$$x_2' = x_1.$$

домаћи: метод сопс. вр. не даје одговор

$V=? \rightsquigarrow \nabla V = (x_1, \sin x_2)\ ? \longrightarrow \langle \nabla V, F\rangle = x_1(-\sin x_2)+\sin x_2 (x_1) = 0 \le 0$

$V(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{2} - \cos x_2 + C \rightarrow ?\ V(0,0)=0 \Rightarrow C=1$

$\left[\frac{0^2}{2} - \cos 0 + C = 0 \quad C=1\right]$



$V(x_1x_2) = \underbrace{\frac{x_1^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{1-\cos x_2}_{\geq 0}$:

$\cos x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 2k\pi$

- V је C^1 ✓
- $V(0,0)=0$ ✓

$V(x)>0$ за $x_1\neq 0 \vee \cos x_2 \neq 1$

важи сигурно на $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2 < (2\pi)^2\}\setminus\{(0,0)\}$

важи стурно на $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid \underline{x_1^2+x_2^2<(2\pi)^2}\} \setminus \{(0,0)\}$

$$\mathcal{U} \neq \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{U} = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2<(2\pi)^2\}$$

$V(x)>0$, за $x\in \mathcal{U}\setminus\{x_*\}$ ✓

- $V'(x) = \langle \nabla V(x), F(x)\rangle = 0 \leq 0$ ✓

$\Rightarrow$ X_* је стабилан еквилибријум

дати:
$$x_1' = x_2 - x_1 x_2^2$$
$$x_2' = -x_1^3$$

а) $V(x_1,x_2) = ax_1^2+bx_2^2$ се не може користити као ф-ја Љапунова

б) $V(x_1,x_2) = ax_1^4+bx_2^2$ ← потражити у овом облику