Експоненти матрице

$X' = AX$, $X, X' \in \mathbb{R}^n$

$A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$x_k' = \frac{dx_k}{dt}$

$X(t)$, $X'(t)$

$x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$

$\vdots$

$x_n' = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n$

систем од n диф. јна првог реда ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) или диф. јна првог реда ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$)

$\boxed{T}$ ОР је $X(t) = \underbrace{e^{tA}}_{\in M_n(\mathbb{R})} \cdot C$, $C \in \mathbb{R}^n$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$e : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $e = \exp$

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Тврђење 52. **(Својства експонента.)**

(1) $e^{\mathbf{0}} = \mathrm{Id}$;

(2) $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$;

(3) $AB = BA \Rightarrow Be^A = e^A B$;

(4) $e^A = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\mathrm{Id} + \frac{A}{n}\right)^n$;

(5) за $U = \mathbb{R}^n$, тј. $A \in M_n(\mathbb{R})$ важи $\frac{d}{dt}e^{tA} = e^{tA}A = Ae^{tA}$;

(6) за $U = \mathbb{R}^n$ важи $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$;

(7) за $U = \mathbb{R}^n$ важи $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$.

$\mathbf{0}$ – нула матрица

$\mathrm{Id} = E = I$ – јединична матр.

$\mathbf{0}, \mathrm{Id} \in M_n(\mathbb{R})$

(1) Решити систем ДЈ $X' = AX$, одређивањем e^{tA} у облику степеног реда, ако је,

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ в) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ г) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

б) $$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

б) $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$

$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$

индукцијом: $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2^k-1 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2^k-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1+2^{k+1}-2 = 2^{k+1}-1$

Б: $k=1$ ✓

К: $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2^k-1 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2^{k+1}-1 \\ 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix}$ ✓

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \cdot A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2^k-1 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k - t^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t}-e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} = e^{2t}$

ОР: $X(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t}-e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot c = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2(e^{2t}-e^t) \\ c_2 e^{2t} \end{bmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c \in \mathbb{R}^2$

в) $$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} A^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} \cdot (-1)^k E}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} \cdot (-1)^k A}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} & \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \end{bmatrix}$$

$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A$ $\quad = A^{4k+1}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$ $\quad = A^{4k+2}$

$A^3 = A^2 \cdot A = (-E) \cdot A = -A$ $\quad = A^{4k+3}$

$A^4 = A^3 \cdot A = (-A) \cdot A = -A^2 = -(-E) = E$ $\quad = A^{4k}$

$A^{2k} = (-1)^k E$

$A^{2k+1} = (-1)^k A$

$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} \cdot (-1)^k}{(2k+1)!}$

$\Rightarrow e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = R_t$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}\cdot(-1)^k}{(2k+1)!}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}\cdot(-1)^k}{(2k)!}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = R_t$$

↳ матрица ротације за t

ОР: $X(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot C,\ C \in \mathbb{R}^2$

г) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3+ab^2 & 3a^2b-b^3 \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \rightarrow \text{тешко!}$$

X

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}}_{P} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}}_{Q}$$

$$PQ = a\cdot E\cdot Q = aQ = Q\cdot aE = Q\cdot P$$

$$tA = t(P+Q) = tP + tQ$$

$$tP\cdot tQ = t^2PQ = t^2QP = tQ\cdot tP$$

(2) $\Rightarrow e^{tA} = e^{tP+tQ} = e^{tP}\cdot e^{tQ}$

$$e^{tP} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k P^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\cdot(aE)^k}{k!} \overset{E^k=E}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k E}{k!} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix} = e^{at}\cdot E$$

$$e^{tQ} = \exp\left(t\cdot b\cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) \overset{(1в)}{=} \ldots = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} = R_{bt}$$

$$e^{tA} = e^{tP}\cdot e^{tQ} = e^{at}\cdot E\cdot R_{bt} = e^{at}\cdot R_{bt} = \begin{bmatrix} e^{at}\cos bt & e^{at}\sin bt \\ -e^{at}\sin bt & e^{at}\cos bt \end{bmatrix}.$$

ОР: $X(t) = e^{tA}\cdot C,\ C \in \mathbb{R}^2$

2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Да ли је $e^A\cdot e^B = e^{A+B}$?

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA \Rightarrow A$ и B не комутирају.

~~(2) $\Rightarrow e^A\cdot e^B \neq e^{A+B}$~~ није добро!

$$e^{A+B} = e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} \overset{(1B)}{=} \mathcal{R}_1$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{1} \frac{A^k}{k!} = E + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = 0, k \geq 2$$

$$e^A \cdot e^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{bmatrix}$$

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = E + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^k = 0, k \geq 2$$

③ Испитати да ли постоји $A \in M_2(\mathbb{R})$ тд:

а) $e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ б) $e^A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ в) $e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

↳ за домашна (ДА)

у $\mathbb{R}$: $e^a = \underbrace{-2}_{\geq 0}$ нема реш

а) $A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \rightsquigarrow e^A = \ldots$ ✗

$$\left.\det(e^A) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (-4) = -4 \right\} e^{tr(A)} = -4 \ \lightning$$

(6) $\Rightarrow \det(e^A) = e^{tr(A)}$

потр. услов: $\det > 0$

б) $\det = (-1)\cdot(-4) = 4 > 0$, али сепак $\nexists A$!

пп да $A \ \exists$.

$$4 = e^{tr(A)} \Rightarrow tr(A) = \ln 4.$$

(3): $A \cdot A = A^2 = A \cdot A \Rightarrow Ae^A = e^A A$, $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

($A = B = A$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha & -4\beta \\ -\gamma & -4\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ -4\gamma & -4\delta \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -4\beta = -\beta \\ -\gamma = -4\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta = \gamma = 0$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \Rightarrow e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \delta^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} e^\alpha = -1 \\ e^\delta = -4 \end{matrix} \ \lightning$$

$$A^k = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \delta^k \end{bmatrix}$$

④ $\lambda \in \mathbb{C}$ сопствена вредност од A, онда је e^λ сопс. вр. од e^A.

$Av = \lambda v \quad , v \neq 0$

? $e^A v' = e^\lambda v'$? (узимамо $v' = v$)

Хоћемо: $e^A v = e^\lambda v$

$A(Av) = A(\lambda v) \Rightarrow A^2 v = \lambda \underbrace{Av} = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$

$\vdots$ (инд.) $A^{k-1} v = \lambda^{k-1} v$

$A^k v = A(A^{k-1} v) = A(\lambda^{k-1} v) = \lambda^{k-1}(Av) = \lambda^{k-1}(\lambda v) = \lambda^k v \Rightarrow \lambda^k$ је сопс. вр. од A^k

$e^A v = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k v}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k v}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) v = e^\lambda \cdot v \Rightarrow e^\lambda$ је сопс. вр. од e^A