Понедељак 30.11.2020.

Егзистенција и јединственост решења ДЈ

Нека је $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал. Кажемо да је векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ локално униформно (по $t \in I$) Липшицово[1] по $\mathbf{x}$ ако свака тачка из $\mathcal{U}$ има околину $\mathcal{B}$ тако да важи $\|F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, t)\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, за неко $L > 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}$, $t \in I$.

Пикар $\Rightarrow$ Е и Ј

Теорема 67. (Пикарова[2] теорема.) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times I \to \mathbb{R}^k$ непрекидно и локално униформно (по t) Липшицово по $\mathbf{x}$. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ и $t_0 \in I$ постоји $\delta > 0$ и јединствено решење*

$$\mathbf{x} : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathcal{U}$$

Кошијевог проблема

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Код нас $k=1$ углавном

$$\mathbf{x}_0(t) \equiv \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_{n+1}(t) := \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} F(\mathbf{x}_n(s), s)ds,$$

Пеано $\Rightarrow$ Е

Теорема 112. (Пеанова[13] теорема) *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : \mathcal{U} \times [t_0 - a, t_0 + a] \to \mathbb{R}^k$ непрекидно. Тада за свако $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ постоји $\delta > 0$ и (не нужно јединствено) решење Кошијевог проблема*

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{71}$$

дефинисано на интервалу $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

① Испитати егзистенцију и јединственост Кошијевог проблема $x' = F(x,t)$, $x(0) = 0$:

а) $F(x,t) = tx^3$ б) $F(x,t) = t^2 \cdot |x|^{1/2}$ в) $F(x,t) = \dfrac{\ln x}{1 - \operatorname{sgn} x}$

а) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t, x^3 полиноми $\Rightarrow$ F непрекидна $\overset{\text{Пеано}}{\Rightarrow}$ $\exists$ решење

$k=1$: $\|F(x,t) - F(y,t)\| \leq L \cdot \|x-y\|$

локално око $(0,0)$ (t_0, x_0) испитујемо Е и Ј

$$|tx^3 - ty^3| \leq L \cdot |x-y|$$

$t \in [-a, a]$

$x, y \in \mathcal{B}(0)$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$|t| \cdot |x^3 - y^3| \leq L \cdot |x-y|$$

$\mathcal{B}(0) = [-b, b]$

$$|t| \cdot |x^2 + xy + y^2| < L \ ?$$

$$|t| \cdot |x^2+xy+y^2| \leq \underbrace{|t|}_{\leq a} \cdot \Big(\underbrace{|x|^2}_{\leq b^2} + \underbrace{|x||y|}_{\leq b^2} + \underbrace{|y|^2}_{\leq b^2}\Big) \leq \boxed{a \cdot 3b^2 = L}$$

$\hookrightarrow$ константа (за фикс. a и b)

$\Rightarrow$ јесте Лип. $\overset{\text{Пикар}}{\Longrightarrow}$ Е + Ј

(*) $|tx^3 - ty^3| = \underbrace{|t|}_{\text{небитно}} \cdot \boxed{|x^3 - y^3|}$ не зависи од t

$|f(x) - f(y)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq L} \cdot |x-y|$

$|tx-ty| = \underbrace{|t|}_{\text{небитно}}\cdot\boxed{|x-y|}$ не зависи од t

↳ C^1 фја : увек локално Липшицова

$|f(x)-f(y)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\le L}|x-y|$

$$L = \max|f'|$$

$x \mapsto x^3$ јесте C^1

ово важи и у вишим димензијама: $L = \max\limits_{i,j}\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|$ — Т о ср. вр. у вишим дим. такође важи

б) $F(x,t) = t^2\cdot|x|^{1/2}$

$$\left.\begin{array}{l} t^2 \\ |x| \\ \sqrt{|x|} \\ t^2\cdot\sqrt{|x|} \end{array}\right\} \text{непр.} \xRightarrow{\text{Пеано}} \exists\text{реш.}$$

$$|F(x,t)-F(y,t)| = |t^2\sqrt{|x|} - t^2\sqrt{|y|}| \le L\cdot|x-y|$$

→ t у некој околини 0, нпр. $[-1,1]$

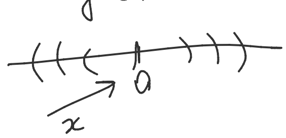
$$\underbrace{|t^2|}_{\le 1}\cdot\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \le \boxed{\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \overset{?}{\le} L\cdot|x-y|}$$

доказаћемо да L не постоји (у свакој околини нуле!)

$x(\underset{t}{0}) = \underset{x}{0}$

ппс $\exists L$ тд. $\forall$ околину нуле U: $\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \le L\cdot|x-y|$, $\forall x,y\in U$

$y=0$:



$$\sqrt{|x|} \le L\cdot|x| \quad /:|x|$$

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \le L$$

$\lim\limits_{x\to 0}$: $\infty \le L$ ↯ (L коначно фикс.) ⇒ не важи услов из Пикара

$\boxed{\text{НЕ ЗНАЧИ}}$ да решење није јединствено!

$x' = t^2\cdot|x|^{1/2}$

$$x' = t^2 \cdot |x|^{1/2}$$

$x \equiv 0$ ✓

$x \neq 0$: $\dfrac{x'}{\sqrt{|x|}} = t^2$ РП

1) $x > 0$ $\quad \dfrac{x'}{\sqrt{x}} = t^2 \;/\int$

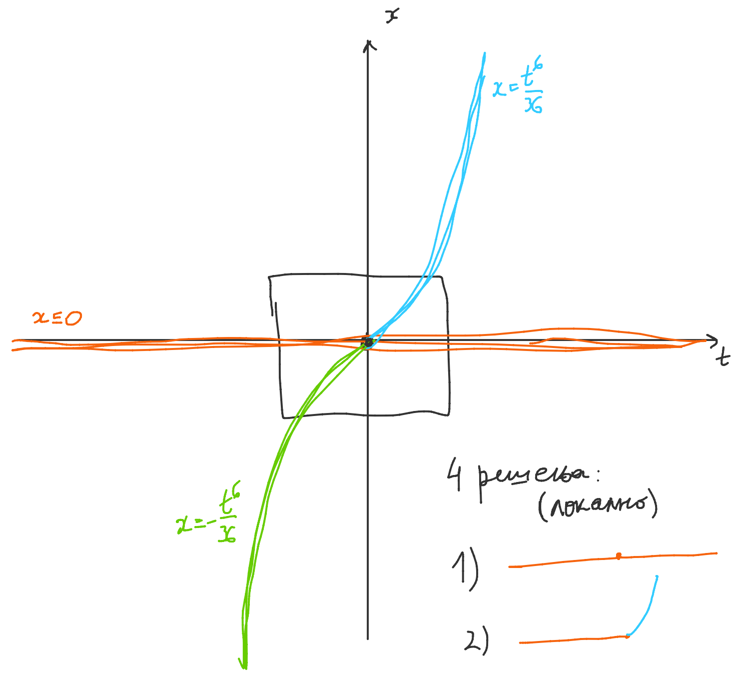
$$2\sqrt{x} = \frac{t^3}{3} + C$$

$\left.\begin{matrix} t \to 0 \\ x \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C = 0$ (непр. продужимо до $(0,0)$) $\Rightarrow \quad x = \dfrac{t^6}{36}$

2) $x < 0$ $\quad \dfrac{x'}{\sqrt{-x}} = t^2 \;/\int$

$$-2\sqrt{-x} = \frac{t^3}{3} + C$$

$\therefore C = 0 \quad \therefore x = -\dfrac{t^6}{36}$



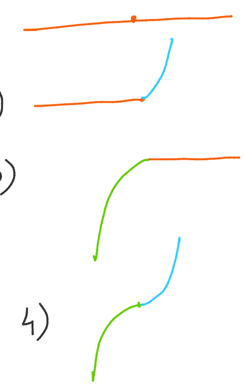
4 решења: (локално)

1)

2)

3)

4)



За вежбу: сва 4 јесу решења (јесу C^1)

$t \mapsto \dfrac{t^6}{36}$ је C^∞

В) $F(x,t) = \dfrac{\ln x}{1 - \operatorname{sgn} x}$ $\to x > 0$

$1 \neq \operatorname{sgn} x \Rightarrow \neg(x > 0)$ $\Big\}$ ↯

$\Rightarrow$ нема решења

(2) $x' = x(1-x)$. Без решавања:

а) Свако решење под. $x(0) = a \in (0,1) \Rightarrow (\forall t)\ 0 < x(t) < 1$.

б) Наћи $\lim\limits_{t \to \infty} x(t)$ у зависности од $x(0) = a \in \mathbb{R}$.

б) Наћи $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ у зависности од $x(0)=a\in\mathbb{R}$.

а) $\underset{\overset{\shortparallel}{x'}}{F(x,t)}=x(1-x)$ је $\underbrace{\text{аутономно}}_{\hookrightarrow \text{нема } t}$ и C^1 $\qquad (x(1-x))'_x = 1-2x\in C(\mathbb{R})$ ✓

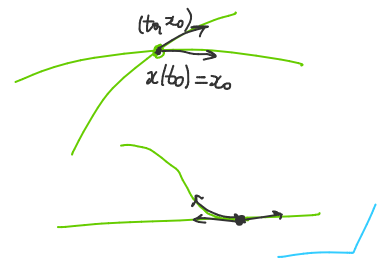
$\Downarrow$

важи Пикар! (у свакој тачки)

$\Downarrow$

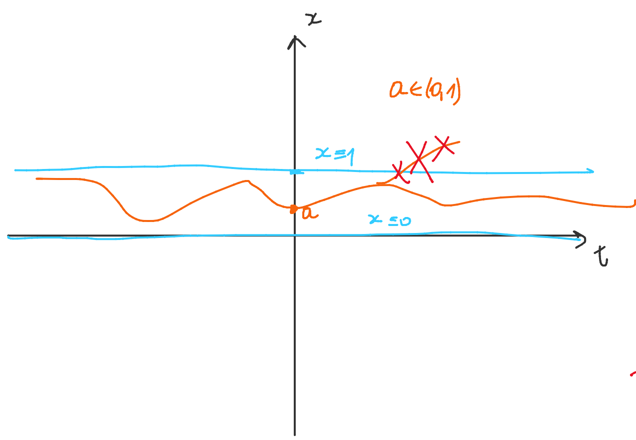
решења се не секу!

Пикар ⇒ решења се не секу



$x\equiv 0$, $x\equiv 1$ $\Big\}$ јесу решења

свако решење $x(0)=a\in(0,1)$ не сме да изађе из траке $\mathbb{R}\times(0,1)$



$\Rightarrow (\forall t)\ 0<x(t)<1.$

б) $x'=x(1-x)$, $x(0)=a$

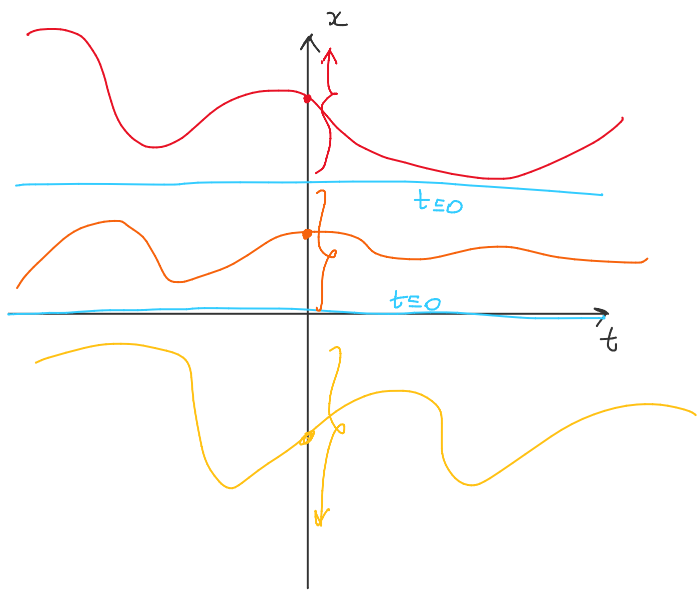
1° $a\in(0,1) \Rightarrow x(t)\in(0,1)$

2° $a>1 \Rightarrow x(t)>1$

3° $a<0 \Rightarrow x(t)<0$

4° $a=1 \Rightarrow x(t)\equiv 1$ ✓

5° $a=0 \Rightarrow x(t)\equiv 0$ ✓



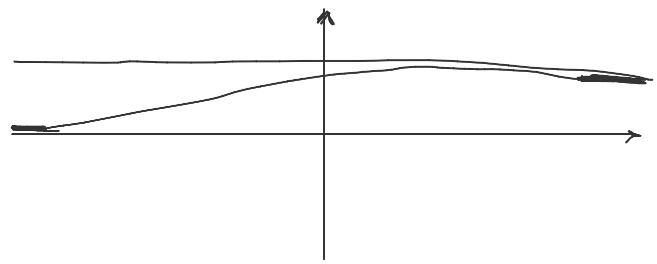
1° $x(t)\in(0,1)$

$x'(t) = \underbrace{x(t)}_{>0} \cdot \underbrace{(1-x(t))}_{>0} > 0 \Rightarrow x \nearrow$

хор. асимпт. не може пре 0 и 1. $\left.\begin{array}{c} x\to 0 \\ \vee \\ x \to 1\end{array}\right\} x' \to 0$

$x' \to 0 \Leftrightarrow x \to 0 \vee x \to 1$

сва реш. имају $t \to \infty$ асимпт. $x = 1$.



2° $x(t) > 1$

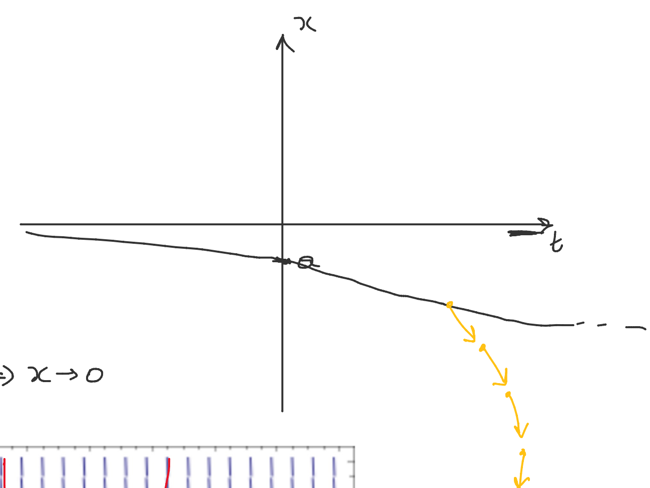
$x'(t) = \underbrace{x(t)}_{>0} \cdot \underbrace{(1-x(t))}_{<0} < 0 \Rightarrow x \downarrow$

$x' \to 0 \Leftrightarrow x \to 1$

$\Rightarrow$ хор. асимпт. $t \to \infty$ је $x = 1$.

3° $x(t) < 0$

$x'(t) = \underbrace{x(t)}_{<0} \cdot \underbrace{(1-x(t))}_{>0} < 0 \Rightarrow x \downarrow$



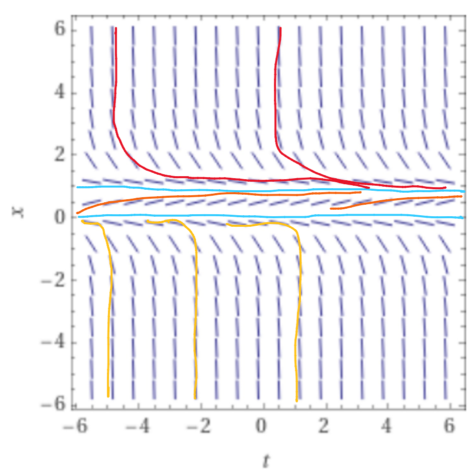
ако $x \not\to -\infty$: онда се продужава на $\mathbb{R}$

$t \to \infty$: $\exists$ хор. асимпт. ↯

$x' \to 0 \Leftrightarrow x \to 0$

$\Rightarrow x \to -\infty$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$



③ Доказати да $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt[4]{x^2+y^2})$ није локално Липшицова ни у једној околини $(0,0)$.

$f(X_1)$ $f(X_2)$ X_1 X_2

Тј. $x' = \sqrt{x^2+y^2}$
$y' = \sqrt[4]{x^2+y^2}$ $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \sqrt[4]{x^2+y^2} \end{bmatrix}$

околини $(0,0)$.

$$\|\overbrace{f(x_1,y_1)}^{f(X_1)}-\underbrace{\overbrace{f(x_2,y_2)}^{f(X_2)}}_{=(0,0)}\| \le L\cdot \|\overbrace{(x_1,y_1)}^{X_1}-\underbrace{\overbrace{(x_2,y_2)}^{X_2}}_{=(0,0)}\|$$

Пр: $x' = \sqrt{x^2+y^2}$, $y' = \sqrt[4]{x^2+y^2}$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \sqrt[4]{x^2+y^2} \end{bmatrix}$

не важи Пикар за $X(t_0)=(0,0)$

узимамо $(x_2,y_2)=(0,0)$. $f(0,0)=(0,0)$

$$\|f(x_1,y_1)\| \le L\cdot\|(x_1,y_1)\|$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)^2+\left(\sqrt[4]{x_1^2+y_1^2}\right)^2} \le L\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2} \quad /^2$$

$$x_1^2+y_1^2+\sqrt{x_1^2+y_1^2} \le L^2\cdot(x_1^2+y_1^2) \quad /:(x_1^2+y_1^2) \neq (0,0)$$

$$1+\boxed{\frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}} \le L^2 \quad \to \infty$$

$$\lim_{(x_1,y_1)\to(0,0)} \Rightarrow \infty \le L^2 \ ↯$$

④ Формирати низ итерација из Пикарове Т за проблем: $x' = \frac{x}{t}$, $x(t_0)=x_0$, $t_0>0$

$F(x,t) = \frac{x}{t}$

$$\underline{\mathbf{x}_0(t)\equiv\mathbf{x}_0,}\quad \mathbf{x}_{n+1}(t) := \mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t}F(\mathbf{x}_n(s),s)ds,$$

$$x_1(t) = x_0+\int_{t_0}^{t}\frac{\overset{x_0}{x_0(s)}}{s}ds = x_0+(\ln(t)-\ln(t_0))\cdot x_0$$

$$x_2(t) = x_0+\int_{t_0}^{t}\frac{x_1(s)}{s}ds = x_0+\int_{t_0}^{t}\frac{\overset{\text{конст.}}{x_0(1-\ln(t_0))}+\ln(s))}{s}ds = x_0+x_0\cdot(1-\ln(t_0))\cdot(\ln(s))\Big|_{t_0}^{t}$$

$$+\,x_0\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{\ln s}{s}ds \quad \ln s = u,$$

$$= x_0+x_0(1-\ln(t_0))\cdot(\ln(t)-\ln(t_0))+x_0\cdot\left(\frac{\ln^2 s}{2}\right)\Big|_{t_0}^{t} =$$

$$= x_0+x_0(1-\ln(t_0))\cdot(\ln(t)-\ln(t_0))+\frac{x_0}{2}(\ln^2 t-\ln^2 t_0)$$

$$x_3(t) = x_0+\int^{t}\frac{x_2(s)}{s}\ \ \int^{t}\frac{x_0-\ln(t_0)\cdot x_0\cdot(1-\ln(t_0))-\frac{x_0}{2}\ln^2 t_0}{\ }\ \ +\int^{t}\frac{x_0(1-\ln(t_0))\cdot\ln(s)}{\ }ds$$

$$x_3(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{x_2(s)}{s}\,ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{x_0 - \ln(t_0)\cdot x_0\cdot(1-\ln(t_0)) - \frac{x_0}{2}\ln^2 t_0}{s}\,ds + \int_{t_0}^{t} \frac{x_0(1-\ln(t_0))\cdot \ln(s)}{s}\,ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \frac{x_0}{2}\cdot\frac{\ln^2(s)}{s}\,ds =$$

$$\int \frac{\ln^n s}{s}\,ds \underset{u=\ln s}{=} \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(\ln s)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= x_0 + \left(x_0 - \ln(t_0)\cdot x_0(1-\ln(t_0)) - \frac{x_0}{2}\ln^2(t_0)\right)\cdot\left(\ln(t) - \ln(t_0)\right) + x_0(1-\ln(t_0))\cdot\frac{1}{2}\left(\ln^2(t) - \ln^2(t_0)\right)$$

$$+ \frac{x_0}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\ln^3 t - \ln^3 t_0\right)$$