Понедељак 23.11.2020.

1. Скицирати фазни портрет динамичког система $X' = AX$, ако је:

поновљене сопс. вр.

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ б) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ в) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ г) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ д) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Линк ка материјалима из курса ДЈБ одакле је узет овај задатак. Као што смо помињали, не морате решавати једначину (као у материјалима), ако знате са предавања како фазни портрет треба да изгледа. https://tinyurl.com/fazniPortreti2

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \lor \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

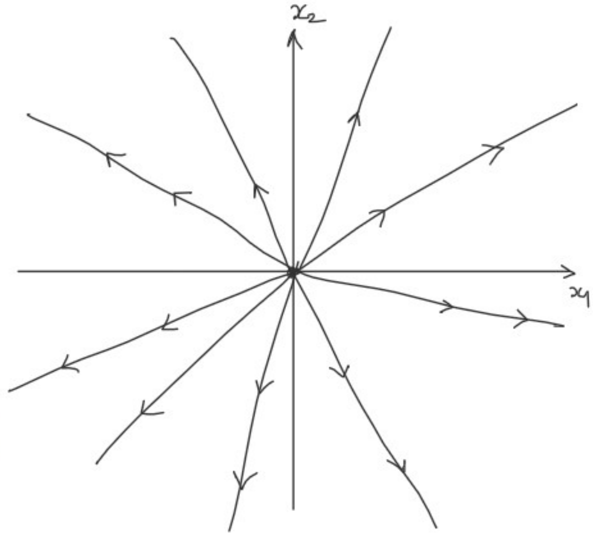
а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ← већ дијагонална

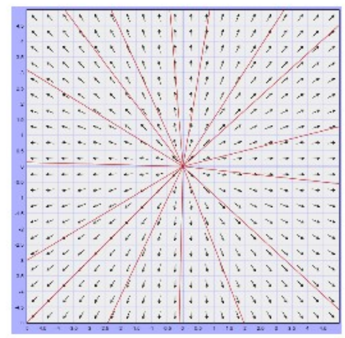
$P = E$

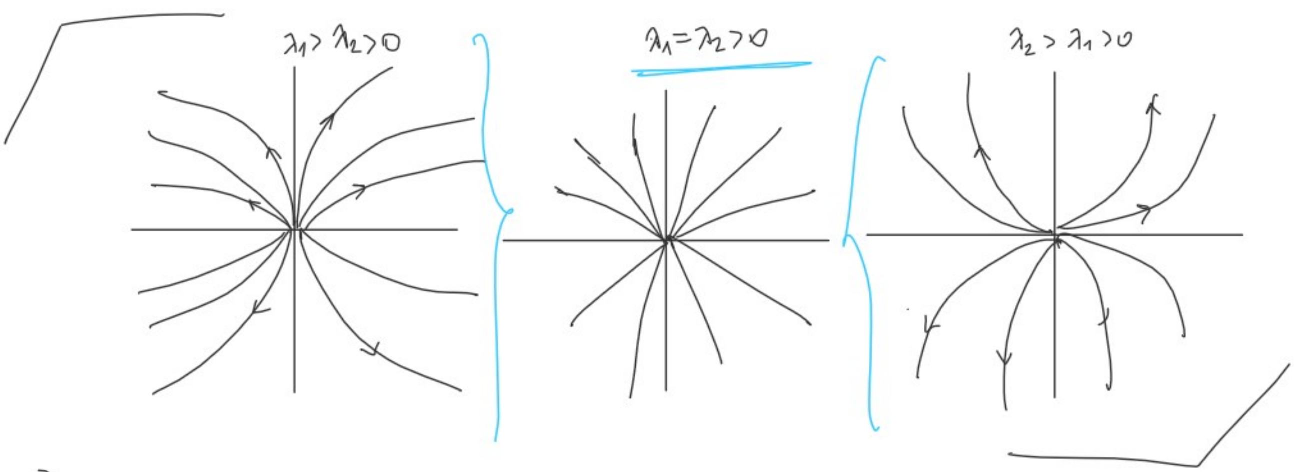
$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

↳ нестабилна звезда (сингуларни чвор)

$X^* = (0,0)$







г) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $X^* = (0,0)$ $(\det A \neq 0)$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \lor \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}$$

ако је димензија сопственог потпростора од λ мања (<) од 2 $\iff$ $\boxed{\dim = 1}$

[геометријска вишеструкост < алгебарска вишеструкост]

У вишим дим.: $\underline{\underline{n=3}}$ $\begin{bmatrix} \boxed{\lambda} & & \\ & \boxed{\lambda} & \\ & & \boxed{\lambda} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 \\ & \lambda\end{matrix}} & \\ & \boxed{\lambda} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{matrix}} \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{n=4}}$ $\begin{bmatrix} \boxed{\lambda} & & & \\ & \boxed{\lambda} & & \\ & & \boxed{\lambda} & \\ & & & \boxed{\lambda} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 \\ & \lambda\end{matrix}} & & \\ & \boxed{\lambda} & \\ & & \boxed{\lambda} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda\end{matrix}} & \\ & \boxed{\lambda} \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 \\ & \lambda\end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 \\ & \lambda\end{matrix}} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{matrix}} \end{bmatrix}$

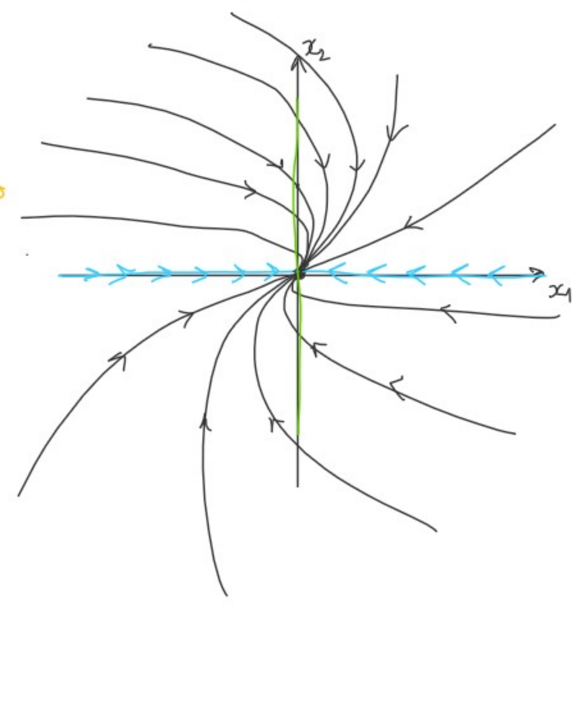
$(A - \overset{-2}{\overset{\parallel}{\lambda}} E)v = 0$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} v = 0$

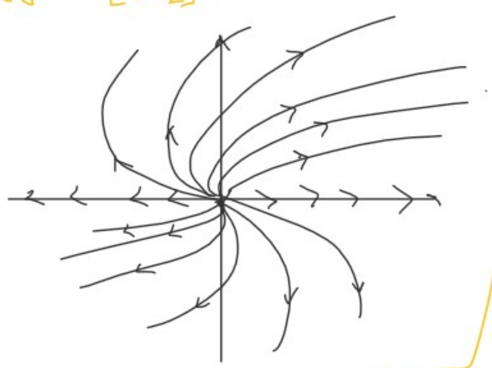
$\left.\begin{matrix} -1\cdot\alpha + \beta = 0 \\ \alpha = \beta \end{matrix}\right\} v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\dim\big(\underbrace{\Omega\big(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\big)}_{\text{Span, Lin}, \mathcal{L}}\big) = 1 \Rightarrow$ један Жорданов блок

$D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \to$ стабилан дегенерисан чвор

$(-2<0)$



У случају $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ нестаб.



$P = ?$ $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to$ тражимо v_2 (генералисани сопствени вектор)

$$(A-\lambda E)v_2 = v_1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-\gamma+\delta=1 \Rightarrow \delta = 1+\gamma \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\cancel{-\gamma+\delta=1}$

$\gamma=0$
$\delta=1$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det P > 0 \rightarrow$ нема рефлексије