Понедељак 21.12.2020.

$\boxed{4}$ $F(e^{\ell}t, e^{k\ell}x, e^{(k-1)\ell}x', e^{(k-2)\ell}x'', \dots, e^{(k-n)\ell}x^{(n)}) = e^{m\ell}\cdot F(t,x,\dots,x^{(n)})$ (не редукује обавезно степен)

за неке k и m

онда: $t>0$: $t=e^{u}$, $x(u)=e^{ku}\cdot v(u)$ $\qquad x(t)\rightsquigarrow v(u)$

$t<0$: $t=-e^{u}$, $x(u)=e^{ku}\cdot v(u)$

1) а) $t^3x''+2txx'-t^2(x')^2-x^2=0$

б) $t^4x''-(2tx+t^3)x'+4x^2=0$

в) $t^2(xx''-(x')^2)+txx'=(2tx'-3x)\sqrt{t^3}$, $t>0$.

а) $F(e^{\ell}t, e^{k\ell}x, e^{(k-1)\ell}x', e^{(k-2)\ell}x'') = (e^{\ell}t)^3\cdot e^{(k-2)\ell}x''+2\cdot e^{\ell}t\cdot e^{k\ell}x\cdot e^{(k-1)\ell}x'-(e^{\ell}t)^2\cdot(e^{(k-1)\ell}x')^2-(e^{k\ell}x)^2=$

$= e^{(3+k-2)\ell}t^3x''+2\cdot e^{(1+k+k-1)\ell}txx'-e^{(2+2k-2)\ell}t^2x'^2-e^{2k\ell}x^2=$

$= e^{(k+1)\ell}t^3x''+2e^{2k\ell}txx'-e^{2k\ell}t^2x'^2-e^{2k\ell}x^2$

$= e^{2\ell}\cdot F(t,x,x',x'')$

$e^{(k+1)\ell}=e^{2k\ell}=e^{m\ell}$

$\Rightarrow m=2k=k+1$

$\Rightarrow k=1,\ m=2$

1) $t>0$

$t=e^{u} \Rightarrow u=\ln t \Rightarrow \frac{du}{dt}=\frac{1}{t} \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{1}{t^2}$

2) $t<0$

⋮

$x(u)=e^{u}\cdot v(u)$ $\qquad v'=\frac{dv}{du}$

$\frac{d}{du}\left(\frac{du}{dt}\right)=\frac{d}{du}\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{d}{du}(e^{-u})=$

$=-e^{-u}$

$x'=x'_t=\frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dt}=(e^{u}v)'_u\cdot\underbrace{\frac{1}{t}}_{e^{-u}}=e^{u}(v+v')\cdot e^{-u}=v+v'$

$x''=\frac{d}{dt}(x')=\frac{d}{du}x'\cdot\frac{du}{dt}=\frac{d}{du}\left(\frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dt}\right)\cdot\frac{du}{dt}=\frac{d^2x}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{dx}{du}\cdot(-e^{-u})\cdot\overbrace{\frac{du}{dt}}^{e^{-u}}$

$=(e^{u}\cdot v(u))''_u\cdot\frac{1}{t^2}+e^{u}(v+v')\cdot(-e^{-2u})=$

$=(e^{u}v+e^{u}v')'_u\cdot e^{-2u}-e^{-u}(v+v')=$

$\dots)-e^{-u}\cdot(v''+v')$

$$= \left(e^u v + e^u v'\right)'_u \cdot e^{-2u} - e^{-u}(v+v') =$$

$$= e^u(v+v'+v'+v'')\cdot e^{-2u} - e^{-u}(v+v') = e^{-u}(v''+2v'+\underline{v-v}-v') = e^{-u}\cdot(v''+v')$$

заменимо: $e^{3u}\cdot e^{-u}(v''+v')+2\cdot e^u\cdot e^u v\cdot(v+v') - e^{2u}(v+v')^2 - e^{2u}\cdot v^2=0$

$$e^{2u}\cdot\left(v''+v'+\cancel{2v^2}+\cancel{2vv'}-\cancel{v^2}-\cancel{2vv'}-v'^2-\cancel{v^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow v''+v'-v'^2=0$$

$v'=w \Rightarrow w'=v''$ $\quad (w(u))$

$$w'+w-w^2=0 \Rightarrow \frac{dw}{w^2-w}=du \quad \dots$$

$\boxed{5}$ $F(x,x',\dots,x^{(n)})=0$ (нема независне променљиве t)

смена: $x(t) \rightsquigarrow y(x)$

$y(x)=x'$

(2) а) $x''=\underline{x^2}\cdot x'$

б) $xx''-2xx'\ln x-(x')^2=0$, $x>0$

$y'=\frac{dy}{dx}$, $x'=\frac{dx}{dt}$

а) $x''=(x')'=(y(x))'=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y'\cdot x'=y'\cdot y$

$y'\cdot y=x^2\cdot y \Rightarrow y(y'-x^2)=0$

$y=0 \lor y(x)=\frac{x^3}{3}+C$

1° $x'=y=0$

$x=c\in\mathbb{R}$ ✓

2° $x'=y=\frac{x^3}{3}+C$

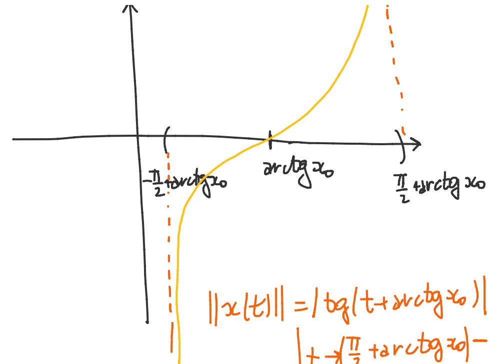
$$\frac{dx}{\frac{x^3}{3}+C}=dt \quad \dots$$

2. Продужење решења

Пример 76. Једначина $x'=1+x^2$ са почетним условом $x(0)=x_0$ не може да се продужи на интервал дужине веће од π, иако је векторско поље $F(x,t)=1+x^2$ глатко на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Заиста,

2. Продужење решења

Пример 76. Једначина $x' = 1 + x^2$ са почетним условом $x(0) = x_0$ не може да се продужи на интервал дужине веће од π, иако је векторско поље $F(x,t) = 1 + x^2$ глатко на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Заиста, њено решење је $x(t) = \operatorname{tg}(t + \operatorname{arctg} x_0)$ и дефинисано је на $\left(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x_0, \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x_0\right)$. ✓



$\|x(t)\| = |\operatorname{tg}(t+\operatorname{arctg} x_0)|$

$t \to (\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x_0)^-$

$t \to (-\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x_0)^+$

$+\infty$

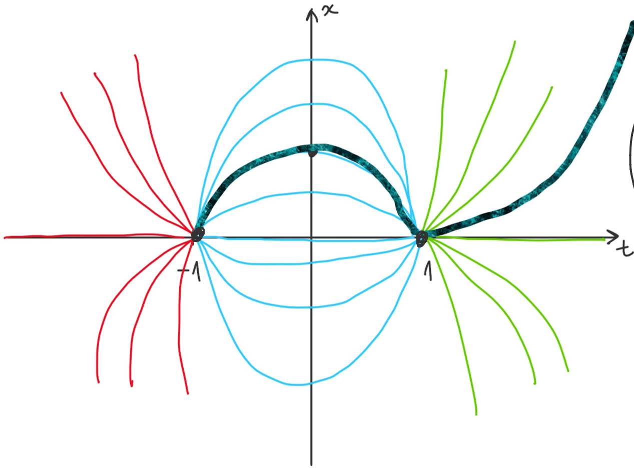
Теорема 77. *Нека је векторско поље $F : \mathcal{U}\times I \to \mathbb{R}^n$ као у Пикаровој теореми 67 и нека је решење једначине $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}, t)$ дефинисано на максималном интервалу J, $\sup J < \sup I$. Ако је $K \subset \mathcal{U}$ компактан, тада постоји $t_1 \in J$ такво да $\mathbf{x}(t_1) \notin K$.*

Последица 78. *Под претпоставкама из Теореме 77, ако је решење $\mathbf{x}(t)$ садржано у неком компакту $K \subset \mathcal{U}$, тада се оно може продужити на цео I.* □

Тврђење 79. Нека важе претпоставке Теореме 77 и нека је $\mathbf{x}(t)$ решење дефинисано на интервалу (α, β) које не може да се продужи у $t = \beta < +\infty$, $\beta \in I$. Тада је

$$\lim_{t\to\beta^-} \|\mathbf{x}(t)\| = +\infty. \tag{54}$$

Пр.



први двочас, зад 7

$x' = \frac{2xt}{t^2-1}$

1° $t \in (-1,1)$

2° $t \in (1,+\infty)$

3° $t \in (-\infty,-1)$

$\lim_{t\to\pm1} \|x(t)\| = 0 \Rightarrow$ могу да се продуже

$x(t) = c\cdot(t^2-1) \to$ може да се продужи на цело $\mathbb{R}$

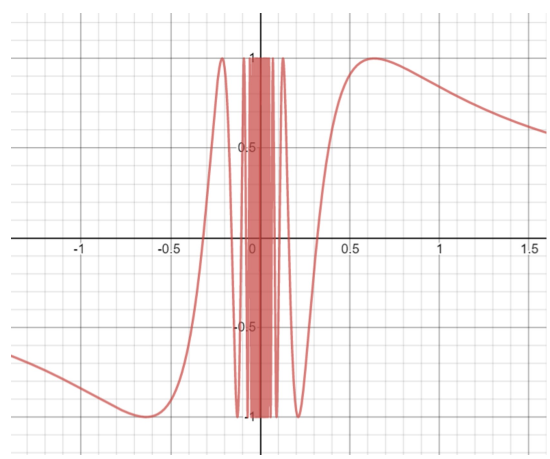
3 Нека је $x' = F(x,t)$, F као из Пикарове Т.

Доказати да $x(t) = \sin\frac{1}{t}$ не може бити њено решење на интервалу $(0,T)$, за неко $T>0$.

ППС $x(t)$ је решење

Да ли можемо $x(t)$ да продужимо преко нуле?

↳ употпуне као фју



$\lim_{t\to0+} \sin\frac{1}{t} = ?$

$t_n = \frac{1}{n\pi}$, $\sin\frac{1}{t_n} = \sin(n\pi) = 0 \to 0$

$t_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $\sin\frac{1}{t_n} = \sin(2n\pi+\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \to 1$

$\nexists \lim_{t\to0+} \sin\frac{1}{t}$

$\Rightarrow \sin\frac{1}{t}$ не може (ни) непрекидно да се продужи преко нуле

T79 $\Rightarrow$ $(\beta=0)$ $\lim_{t\to0+} \|x(t)\| = +\infty$ ↯

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{t\to 0+} \|x(t)\| = +\infty$ $(\beta = 0)$

$\lim\limits_{t\to 0+} \left|\sin \frac{1}{t}\right|$ → не постоји ↯

[↳ ова ф-ја је ограничена]

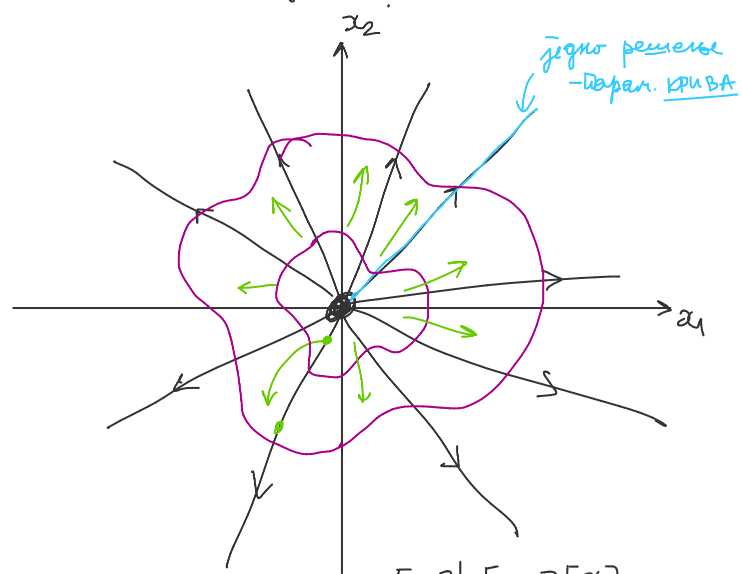
Токови

$$\frac{d}{dt}\phi^t(x) = F(t, \phi^t(x)) \quad , \phi^0 = id \quad (\phi^0(x) = x)$$

време

$\phi^t : U \to \mathbb{R}^n \quad , \forall t$

нест. звезда:



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

испада: $\phi^t(x) = \begin{bmatrix} e^{2t} x_1 \\ e^{2t} x_2 \end{bmatrix}$

$\phi^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

(4) Наћи токове за ДЈ $(x(0) = x_0)$:

а) $x' = x$ (у $\mathbb{R}^n$)

б) $x' = x + 2t$ (у $\mathbb{R}^1$)

а) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \\ \vdots \\ x_n' = x_n \end{matrix} \Rightarrow x_k = c_k e^t, \; k \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow x = c \cdot e^t, \; c \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n \ni x_0 = x(0) = c \cdot e^0 \Rightarrow c = x_0$

ПР: $x = x_0 \cdot e^t$

$\phi^t(x) = ?$ $\qquad \phi^t(x) = x \cdot e^t$

$\phi^0(x) = x$

провера: $\frac{d}{dt}\phi^t(x) = \frac{d}{dt}(x \cdot e^t) = e^t \cdot x$
$\| $
$F(t, \phi^t(x)) = \phi^t(x) = e^t \cdot x$ ✓

$\phi^0(x) = e^0 \cdot x = x$ ✓

б) ОР: $x(t) = ce^t - 2t - 2$

$x_0 = x(0) = c \cdot e^0 - 2 \cdot 0 - 2 = c - 2 \Rightarrow c = 2 + x_0$

ПР: $x(t) = (2 + x_0)e^t - 2t - 2$

$\phi^t(x) = (2+x)e^t - 2t - 2$

провера: $\frac{d}{dt}\phi^t(x) = (2+x)e^t - 2$

$F(t, \phi^t(x)) = \phi^t(x) + 2t = (2+x)e^t - 2t - 2 + 2t = (2+x)e^t - 2$ ✓

$\phi^0(x) = (2+x)\cdot 1 - 0 - 2 = 2 + x - 2 = x$ ✓

Једнопараметарска фамилија трансликавања (ЈФП): $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$

$\phi^0 = id$

$\phi^t : M \to M, \forall t \in \mathbb{R}$

5 Проверити да су дате ЈФП у $\mathbb{R}^n$:

а) $\phi^t(x) = (t+1) \cdot x$

б) $\psi^t(x) = e^t \cdot x$

в) $\theta^t(x) = t \cdot (1, \dots, 1) + x$

в) $\theta^{t+s}(x) = (t+s) \cdot (1, \dots, 1) + x$

$\theta^t \circ \theta^s(x) = \theta^t(s \cdot (1, \dots, 1) + x) = t \cdot (1, \dots, 1) + s \cdot (1, \dots, 1) + x = (t+s)\cdot(1, \dots, 1) + x$ $\Rightarrow \theta^{t+s} = \theta^t \circ \theta^s$

$\theta^0(x) = 0 \cdot (1, \dots, 1) + x = x \Rightarrow \theta^0 = id$