Четвртак 15.10.2020.

Организација: ПИ-50п – 2h – 3 зад → 1 зад проф } учити заједно!
УИ-50п

Бонус: домаћи 3×2п

Шта је ДЈ? $f(t,x,x',\dots,x^{(n)})=0$, $x(t)=?$

пр. $x''' + x'\cdot t^2 - 17x = 0$ ← 3. реда

$x(t) = \dots$

ред ДЈ = ред највећег извода који се појављује

$x^{(n)} = \dots f(t,x,\dots,x^{(n-1)}) \xrightarrow{\text{увек може}} x' = f(t,x)$ ↳ + системе ДЈ

$x'(t) = \frac{dx}{dt} = x' = \dot{x}$ $\boxed{x(t)}$, $y(x)$

① Решити ДЈ $x' = 3t^2 + 2t \quad / \int$

$x(t) = t^3 + t^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$

наћи сва решења } често има ∞ много

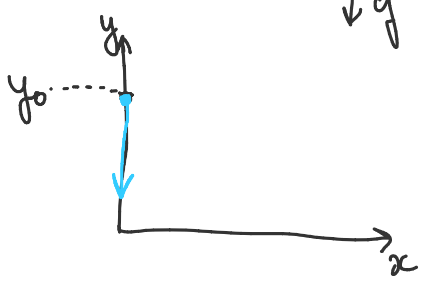
② $\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$, $\forall x > 0 \quad /'$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диф.

$f(x) = f'(x) \rightsquigarrow Ce^x = f(x)$
видети касније

• ОР: општe решење – облик који описује сва решења ДЈ ⇝ $f(x) = c \cdot e^x$, $c \in \mathbb{R}$

• ПР: партикуларно решење – једно решење (c фикс.) ⇝ $f(x) = \frac{3}{2}e^x$

③ Слободан пад: ↓$\vec{g}$



$$\left.\begin{array}{l}\ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g\end{array}\right\}$$

$t=0$ – почетни услови:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x(0) = 0 & \dot{x}(0) = 0 \\ y(0) = y_0 & \dot{y}(0) = 0 \end{array}}$$

$x(t)$ → положај
$\dot{x}(t) = v(t)$ → брзина
$\ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = a(t)$ → убрзање

$y(0) = y_0$

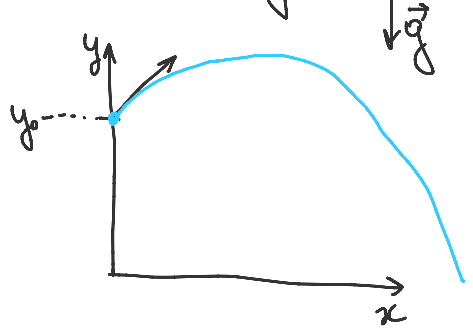
$x(t) = c_1 t + c_2 \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\dot{y}(t) = -gt + c_1 \quad , y(t) = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2 \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x(0)=0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{array}\right\} x(t) \equiv 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=y_0 \Rightarrow c_2 = y_0 \\ \dot{y}(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{array}\right\} y(t) = -\frac{gt^2}{2} + y_0$$

(4) Коси хитац:



$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x(0) = 0 & \dot{x}(0) = v_x \\ y(0) = y_0 & \dot{y}(0) = v_y \end{array}}$$

$x(t) = c_1 t + c_2 \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\dot{y}(t) = -gt + c_1 \quad , y(t) = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2 \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x(0)=0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ \dot{x}(0) = v_x \Rightarrow c_1 = v_x \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = v_x t$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=y_0 \Rightarrow c_2 = y_0 \\ \dot{y}(0) = v_y \Rightarrow c_1 = v_y \end{array}\right\} y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_y t + y_0$$

$$t = \frac{x}{v_x}$$

$$y = -\frac{g\boxed{x^2}}{2v_x^2} + \frac{v_y}{v_x}\boxed{x} + y_0$$

парабола

(5) $x' = kx \quad , k \in \mathbb{R}$

$k = 0 - x \equiv c$

$k < 0$ – радиоактивни распад

$k > 0$ – експоненцијални раст

$\frac{dx}{dt} = k \cdot x \quad , x \neq 0$

$\frac{dx}{x} = k\,dt \quad / \int$

$\left[(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \mathrm{sgn}(x) = \frac{1}{x}\right]$

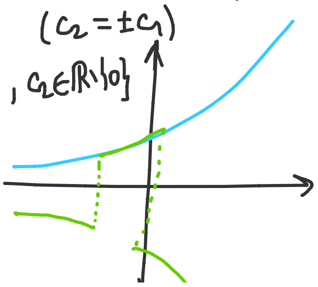
$\ln|x| = kt + c \quad , c \in \mathbb{R}$

$e^{\square}$

$|x| = e^{kt} \cdot \underbrace{e^c}_{c_1} = c_1 \cdot e^{kt} \quad , c_1 > 0$

$(c_2 = \pm c_1)$

$x = c_2 \cdot e^{kt} \quad , c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



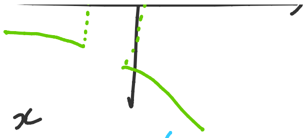
x диф $\Rightarrow x$ непр

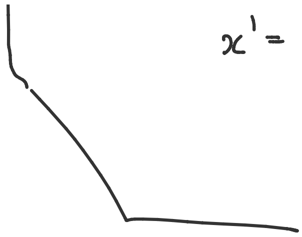
Раздвајање променљивих:

$x'(t) = \frac{f(t)}{g(x)} \quad , \quad f \in C(a,b)$
$g \in C(c,d) \ , g \neq 0$

ОР: $\int_{x_0}^{x} g(u)\,du = \int_{t_0}^{t} f(v)\,dv \quad \left(\int g(x)\,dx = \int f(t)\,dt\right)$

$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{g(x)}$





$$x' = \frac{dx}{dt} \cancel{=} \frac{f(t)}{g(x)}$$

$$g(x)dx = f(t)dt \quad / \int$$

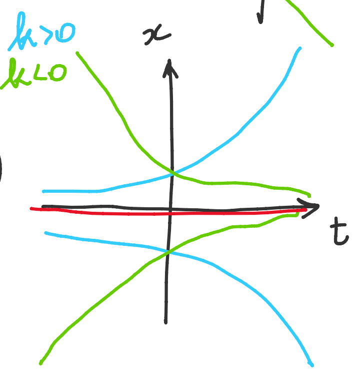
$\vdots$

$\boxed{x \equiv 0}$: ✓

Пикарова Т (касније)

$\downarrow$

решења се не секу (овде)



ОР: $x = C_3 \cdot e^{kt}$, $C_3 \in \mathbb{R}$

• Кошијев проблем: $x' = f(x,t)$

$x(t_0) = x_0$ ← Кошијев услов

n-тог реда

$x(t_0) = x_0$

$x'(t_0) = x_1$

$\vdots$

$x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$

(6) $tx' = x$, ОР и ПР тд. $x(-3) = \frac{1}{3}$.

$$t \cdot \frac{dx}{dt} = x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \quad / \int \qquad x \neq 0, \; t \neq 0$$

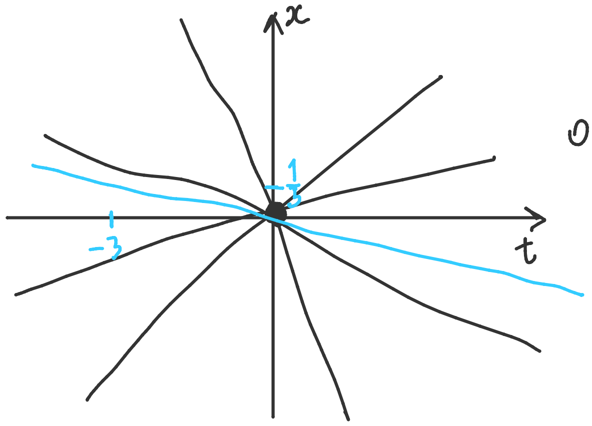
$$\ln|x| = \ln|t| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$|x| = |t| \cdot \underbrace{e^{c}}_{c_1}, \quad c_1 > 0$$

$$\boxed{x = c_2 \cdot t}_{\text{ОР}}, \quad c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$0 = x$ - реш $\Rightarrow$ $c_2 \in \mathbb{R}$

$t=0$: $\underbrace{0 \cdot x'(0)}_{0} = x(0) \Rightarrow x(0) = 0$



ПР: $x(-3) = \frac{1}{3}$: $\frac{1}{3} = c_2 \cdot (-3) \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{t}{9}}$

(7) $x' = \frac{2xt}{t^2 - 1}$. Решити ДЈ, скицирати решења

(7) $x' = \dfrac{2xt}{t^2-1}$. Решити ДЈ, скицирати решења
↳ интегралне криве

$|t| \neq 1$

Наћи ПР:

а) $x(0)=1$

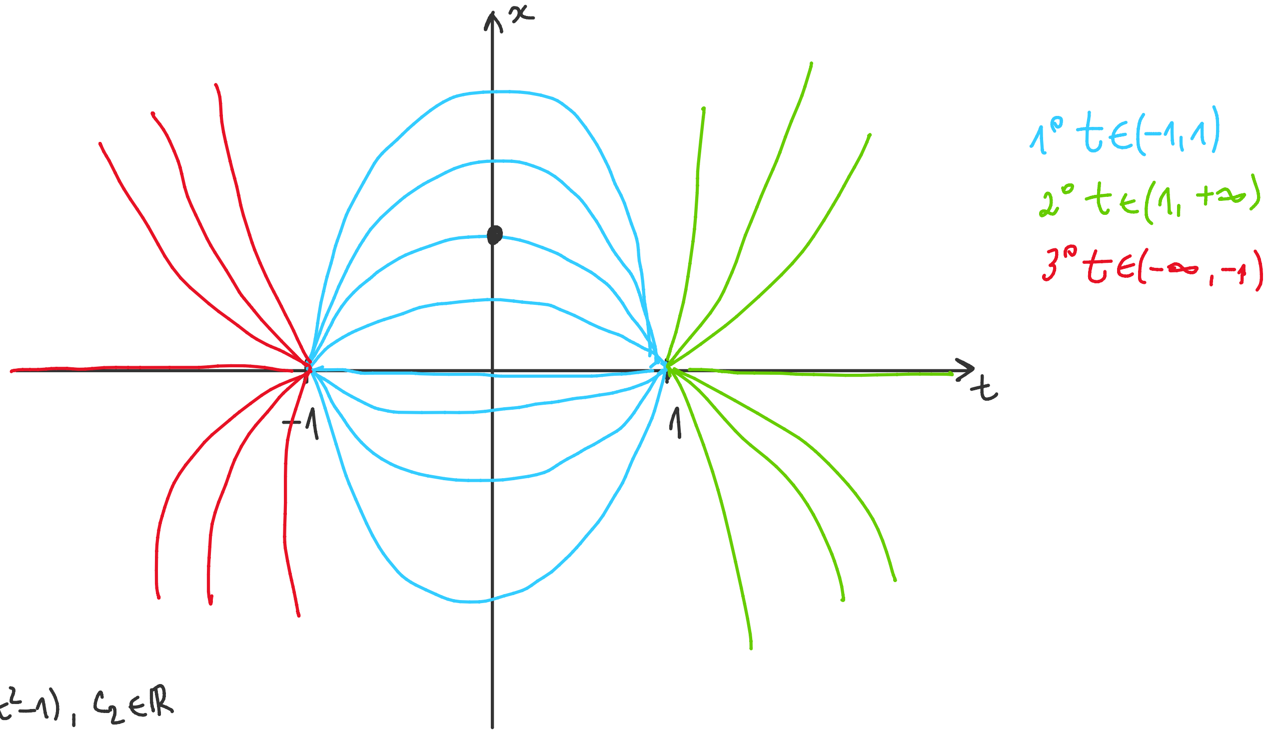
б) $x(2)=1$

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \frac{2t}{t^2-1} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2t}{t^2-1}\,dt \quad / \int$$

$$\ln|x| = \ln|t^2-1| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$|x| = C_1 \cdot |t^2-1|, \quad C_1 > 0$$

$$\boxed{x = C_2 \cdot (t^2-1)} \ \text{ОР}, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$



$x = C_2(t^2-1)$, $C_2 \in \mathbb{R}$

- $x(0)=1$ $\quad 0 \in (-1,1)$

  $1 = C_2(0^2-1) \Rightarrow C_2 = -1 \Rightarrow \boxed{x(t) = 1-t^2, \ t \in (-1,1)}$

- $x(2)=1$ $\quad 2 \in (1,+\infty)$

  $1 = C_2(2^2-1) = 3C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{t^2-1}{3}, \ t \in (1,+\infty)}$

За домаћи: $x' = kx^2$, $k>0$ } ОР, показати да ... није деф. на $\mathbb{R}$ и

За домаћи: $x' = kx^2$, $k>0$ једначина експлозије } ОР, показати да решење није деф. на $\mathbb{R}$ и да се НЕ може продужити

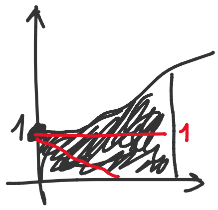
⑧ Наћи све C^1 функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

т.д. $f(0)=1$ и:

површина испод графика од f од 0 до x_0

=

дужини лука од f од 0 до x_0 } $\forall x_0>0$



$$\underbrace{\int_0^{x_0} f(t)\,dt} = \underbrace{\int_0^{x_0} \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt} \,\Big/'_{x_0}, \quad \forall x_0>0$$

$$f(x_0) = \sqrt{1+f'(x_0)^2} \,\Big/^2 \qquad \Rightarrow f(x_0) \geq 1$$

$$f^2 = 1+f'^2 \Rightarrow f'^2 = \underbrace{f^2-1}_{\geq 0}$$

$$f' = +\sqrt{f^2-1}$$

$\boxed{-} \Rightarrow f'<0 \Rightarrow f\downarrow$ ✗

$$f' = \frac{df}{dx_0}$$

$f=1$?

$$\frac{df}{\sqrt{f^2-1}} = dx_0 \quad \Big/ \int$$

⋮

?