Последица 89. *Вронскијан $W(t)$ фундаменталног система решења линеарне једначине реда n:*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0$$

једнак је $W'(t) = \ldots W(t) \longrightarrow$

$$\boxed{W(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}\, W(t_0).} \tag{60}$$

$x_1, \ldots, x_n$

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1' & x_2' & \cdots & x_n' \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Доказ. Видети дискусију на страни 39. □

Напомена 90. Формула (60) се зове и *Абелова*[6] *формула.* Из ње можемо да изведемо формулу за сва решења линеарне једначине: $\boxed{n=2}$

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = 0, \tag{61}$$

ако нам је познато једно (нетривијално) решење, $x_1(t)$. Заиста, претпоставимо да је $x_2(t)$ решење једначине (61) линеарно независно са $x_1(t)$, из Абелове формуле имамо да је:

$$W(x_1,x_2)(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = x_1x_2' - x_2x_1'$$

$$x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}\, W(t_0).$$

Ако претходну једначину поделимо за $x_1^2(t)$, добијамо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right) = \frac{e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}\, W(t_0)}{x_1^2(t)},$$

па је

$$x_2(t) = x_1(t)\left(W(t_0)\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} a_1(u)du}}{x_1^2(s)}ds + \frac{x_2(t_0)}{x_1(t_0)}\right).$$

Дакле, ако је познато решење $x_1(t)$, решење $x_2(t)$ тражимо у облику:

$$x_2(t) = x_1(t)\left(c_1\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} a_1(u)du}}{x_1^2(s)}ds + c_2\right).$$

◇

$$c_1 \cdot \boxed{x_1(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} a_1(u)du}}{x_1^2(s)}ds} + \underline{c_2 x_1(t)}$$

$$x_2(t) = x_1(t) \cdot \int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{x_1(t)^2}dt \to \text{други базни вектор в.п. решења}$$

ОР: $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

1) Решити нехомогену линеарну ДЈ ако је познато једно решење хомогене x_1.

$$tx'' + 2x' + tx = \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t} \quad \text{нехомогени део}$$

$$x_1(t) = \frac{\sin t}{t}$$

Нехомогена линеарна ДЈ:

$L(x) = f(t)$

хом. $L(x) = 0 \leadsto x_H(t)$

$x_p(t)$ – партикуларно нехомогене

ОР. $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

$L(x(t)) = L(x_H(t) + x_p(t)) =$

$= L(x_H(t)) + L(x_p(t)) = 0 + f(t) = f(t)$

$$tx'' + 2x' + tx = 0 \Rightarrow x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0 \Rightarrow a_1(t) = \frac{2}{t}$$

Провера:

$$t\cdot\left(\frac{\sin t}{t}\right)'' + 2\cdot\left(\frac{\sin t}{t}\right)' + t\frac{\sin t}{t} =$$

$$= t\cdot\left(\frac{\cos t\cdot t - \sin t}{t^2}\right)' + 2\cdot\frac{\cos t\cdot t - \sin t}{t^2} + t\frac{\sin t}{t} =$$

$$= t\cdot\frac{(\cancel{\cos t} + (-\sin t)\cdot t - \cancel{\cos t})\cdot t^2 - 2t(\cos t\cdot t - \sin t)}{\ldots} + \ldots =$$

$$= t \cdot \frac{(\cancel{\cos t} + (-\sin t)\cdot t - \cancel{\cos t})\cdot t^2 - 2t(\cos t \cdot t - \sin t)}{t^4} + \dots =$$

$$= -\sin t - 2\cancel{\frac{\cos t}{t}} + \frac{2\sin t}{t^2} + 2\cancel{\frac{\cos t}{t}} - \frac{2\sin t}{t^2} + \sin t = 0$$

$$x_2(t) = x_1(t) \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{2}{t} dt}}{x_1^2(t)}\, dt = x_1(t) \cdot \int \frac{e^{-2\ln|t|}}{\sin^2 t} \cdot t^2\, dt = \frac{\sin t}{t} \cdot \int \frac{1}{\cancel{t^2}} \cdot \frac{\cancel{t^2}}{\sin^2 t}\, dt = \frac{\sin t}{t} \cdot \underbrace{\int \frac{dt}{\sin^2 t}}_{-\mathrm{ctg}\, t = -\frac{\cos t}{\cos t}} = -\frac{\cos t}{t}$$

$$\text{OP}: x_H(t) = c_1 \frac{\sin t}{t} + c_2 \frac{\cos t}{t} \rightsquigarrow x(t) = x_H(t) + x_p(t) = c_1 \frac{\sin t}{t} + c_2 \frac{\cos t}{t} + \frac{1}{t^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$x_p(t)$?

$$x_p(t) = \frac{a}{t^2}$$

$$x_p'(t) = -2\frac{a}{t^3}$$

$$x_p''(t) = 6\frac{a}{t^4}$$

$$6\frac{a}{t^3} - 4\frac{a}{t^3} + \frac{a}{t} = \frac{1}{t} + \frac{2}{t^3}$$

$$a = 1$$

Једначине у којима је могуће редуковати ред

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

$\boxed{1}$ $\quad F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = f(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(n)})$

$$y(t) = x^{(k)}(t)$$

(2) а) $(1-t^2)x'' + tx' = 2$

б) $tx'' = x' + t((x')^2 + t^2)$

б) $y(t) = x'(t)$

$x'' = y'$

$$ty' = y + t(y^2 + t^2) \Rightarrow y' = y^2 + \frac{1}{t}y + t^2 \xrightarrow{\text{(тешко)}} y(t) = t \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{c + t^2}{2}\right)$$

$$x' = y \Rightarrow x(t) = \int y(t)\, dt = c_1 - \ln\left|\cos\left(\frac{c+t^2}{2}\right)\right|$$

$\boxed{2}$ Ако $\exists G,\ \frac{d}{dt} G = F \Rightarrow G(t, x, \dots, x^{(n-1)}) = c, \ c \in \mathbb{R}$

③ а) $x'''(1+x'^2) - 3x' x''^2 = 0$

б) $t^2(xx'' - x'^2) + txx' = (2tx' - 3x)\sqrt{t^3}$ $/ : x^2$, $x(1)=1$, $x'(1) = -\frac{1}{2}$

б) $\left(\frac{x'}{x}\right)' = \frac{x''\cdot x - x'\cdot x'}{x^2}$

$\left(\frac{x'}{x}\right)'$

$t^2 \cdot \frac{xx''-x'^2}{x^2} + t\cdot\frac{x'}{x} = \left(2t\frac{x'}{x^2} - \frac{3}{x}\right)\sqrt{t^3}$ $/ : t$

$(t^{3/2})' = \frac{3}{2} t^{1/2}$

$t\cdot\left(\frac{x'}{x}\right)' + \left(\frac{x'}{x}\right)\cdot(t)' = \left(2t\frac{x'}{x^2} - \frac{3}{x}\right)\sqrt{t}$

$\left(t\cdot\frac{x'}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}\left(2tx' - 3x\right)\sqrt{t} = \frac{x\cdot(\frac{3}{2} t^{1/2}) - x'\cdot t^{3/2}}{x^2}\cdot(-2) = \left(-2\cdot\frac{t^{3/2}}{x}\right)'$ $/ \int$

$t\cdot\frac{x'}{x} = -2\cdot\frac{t^{3/2}}{x} + C$

$x' = -2\sqrt{t} + \frac{1}{t} \cdot Cx$ $\rightsquigarrow$ лин.

$x'(1) = -2\sqrt{1} + \frac{1}{1}\cdot c\cdot x(1)$

$-\frac{1}{2} = -2 + c\cdot 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

$\Bigg\}$ $x' = -2\sqrt{t} + \frac{3x}{2t}$ ...

3 F - хомогена функција по $x, x', \dots, x^{(n)}$

$F(t, \lambda x, \lambda x', \dots, \lambda x^{(n)}) = \lambda^m \cdot F(t, x, x', \dots, x^{(n)})$

Смена: $x(t) \rightsquigarrow y(t)$

$x' = yx$

④ а) $x(tx''+x') = tx'^2(1-t)$

б) $xx'' - 3x'^2 + 3xx' - x^2 = 0$

в) $xx'' = x'^2 + 15x^2\sqrt{t}$

в) $F(t,x,x',x'') = \overbrace{xx''}^{2} - \overbrace{x'^2}^{2} - 15\overbrace{x^2}^{2}\sqrt{t}$ $\rightsquigarrow t \geq 0$

$F(t,\lambda x, \lambda x', \lambda x'') = \lambda x\cdot\lambda x'' - (\lambda x')^2 - 15(\lambda x)^2\sqrt{t} = \lambda^2(xx'' - x'^2 - 15x^2\sqrt{t}) = \lambda^2 F(t,x,x',x'')$

$m = 2$

$x' = xy$ $/ '$

$$x'' = (xy)' = x'y + xy' = xy^2 + xy' = x(y^2+y')$$

$$x \cdot (xy^2 + xy') = (xy)^2 + 15x^2\sqrt{t}$$

$$x^2(y^2+y') = x^2(y^2 + 15\sqrt{t})$$

$x = 0$ ✓

$$y^2 + y' = y^2 + 15\sqrt{t} \Rightarrow y' = 15\sqrt{t} \rightsquigarrow y(t) = \frac{2}{3} t^{3/2} \cdot 15 + C = 10t^{3/2} + c$$

$$y = \frac{x'}{x} = 10t^{3/2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$(\ln|x|)' = 10t^{3/2} + c \; / \int$$

$$\ln|x| = 4t^{5/2} + ct + c_1$$

$$\underbrace{x = c_2 e^{4t^{5/2} + ct}} \qquad c_2 \in \mathbb{R}$$