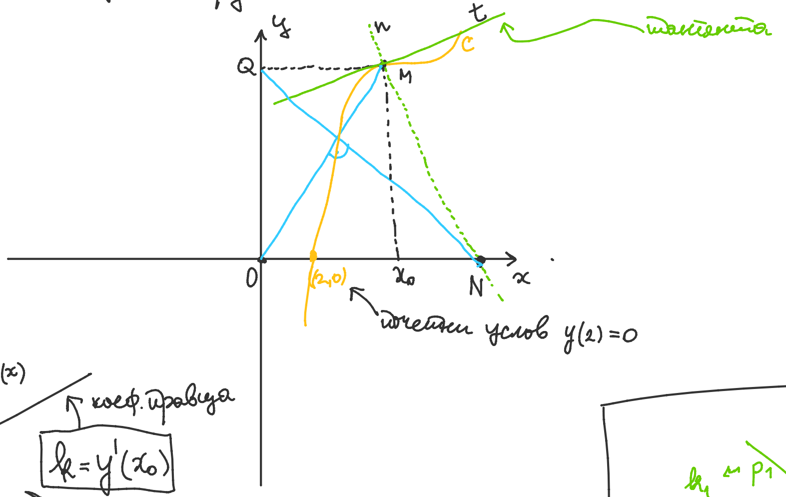
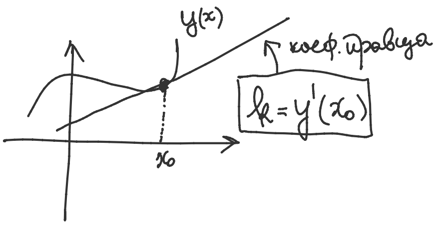
Понедељак 02.11.2020.

(*) За сваку тачку M криве c важи следеће. Нека се M пројектује на y-осу у Q, а нормала на c у M сече x-осу у N. Нека је O коорд. почетак. Ако важи $QN \perp OM$ и крива c пролази кроз $(2,0)$, одредити c.

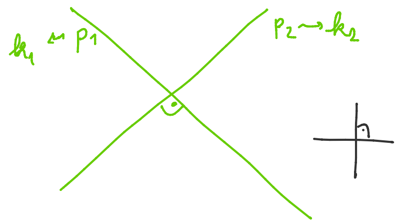


$c: y(x)$

Где је овде ДЈ?



$\boxed{k = y'(x_0)}$



$p_1 \perp p_2 \iff k_1 = -\frac{1}{k_2}$

$M(x_0, y(x_0))$

$Q(0, y(x_0))$

$O(0,0)$

$N(\underline{x_N}, 0)$, $x_N = ?$

$k_t = y'(x_0)$, $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{y'(x_0)}$

$M, N \in n \Rightarrow k_n = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{y(x_0) - 0}{x_0 - x_N} \Rightarrow \frac{y(x_0)}{x_0 - x_N} = -\frac{1}{y'(x_0)}$

$x_N = x_0 + y(x_0) \cdot y'(x_0)$

$OM \perp QN$: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ (OM: k_1, QN: k_2)

$k_1 = \frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{y(x_0)}{x_0}$

$k_2 = \frac{y_N - y_Q}{x_N - x_Q} = \frac{0 - y(x_0)}{x_0 + y(x_0) \cdot y'(x_0) - 0} = -\frac{y(x_0)}{x_0 + y(x_0) y'(x_0)}$

$\frac{y(x_0)}{x_0} = \frac{x_0 + y(x_0) \cdot y'(x_0)}{y(x_0)}$

$\forall x_0$

Правимо ДЈ

x_0 променљива $\rightsquigarrow x$

$y(x_0)$ фја $\longrightarrow y$

$\frac{y}{x} = \frac{x + yy'}{y}$

$\boxed{y^2 = x^2 + xyy' , \ y(2) = 0}$

$$z = y^2, \quad z' = 2yy' \quad \Big\} \quad z = x^2 + x\cdot\frac{z'}{2} \to \text{ЛИН } z(x)$$

$\boxed{7}$ ДЈ са тоталним диференцијалом

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0$$

$x' = \frac{f(t,x)}{g(t,x)} \iff \frac{dx}{dt} = \frac{f(t,x)}{g(t,x)} \iff f(t,x)dt = g(t,x)dx \iff f(t,x)dt - g(t,x)dx = 0$

у диференцијалном облику

$$\to \exists F(t,x), \quad \underbrace{dF(t,x)}_{\text{тот. д.}} = M(t,x)dt + N(t,x)dx$$

$$dF = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{F'_t} dt + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{F'_x} dx$$

$$\left.\begin{aligned} F'_t &= M \;/'_x \\ F'_x &= N \;/'_t \end{aligned}\right\} \Rightarrow M'_x = N'_t$$

$$\text{тот. д.} \Rightarrow M'_x = N'_t$$

важи и $\boxed{\Leftarrow}$ – ако радимо на просто-повезаној (пп) области

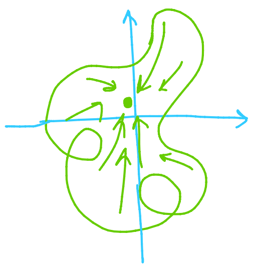
нпр. тамо где је ДЈ дефинисана, или где је посматрамо...

Просто-повезане (пп) области

D је пп $\iff$ сваку непрекидну затворену криву у D можемо скупити у тачку кроз D

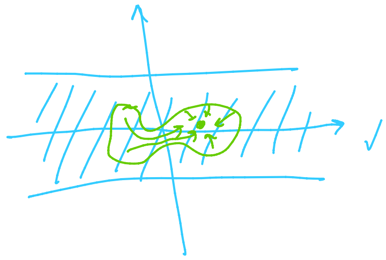
не излазимо из D

пр. 1) $\mathbb{R}^2$



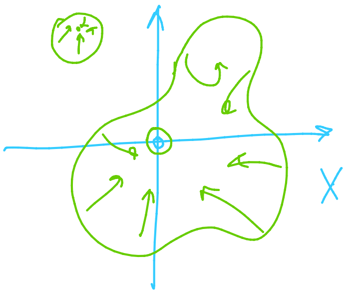
✓

2) трака

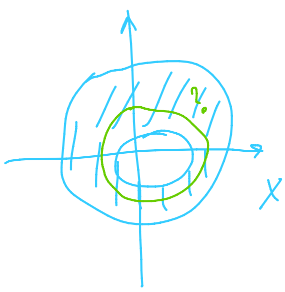


✓

3) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



4)



⊛ у $\mathbb{R}^2$ је пп акко „нема рупу"

у вишим дим ово НЕ важи

→ $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ јесте пп

→ $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$ није пп

права

D пп $\iff \pi_1(D) \cong 0$

топ б

фундаментална група

→ група свих петљи у D

↑ ТОП Б ↑ фундаментална група

→ група свих петљи у D

$\boxed{\Leftarrow}$ исто као: затворена форма $\Longleftrightarrow$ тачна форма

ОР: $F(t,x)=c,\ c\in\mathbb{R}$

$$\underline{0}=M\,dt+N\,dx=\underline{dF}$$

(1) а) $2t\left(1+\sqrt{t^2-x}\right)dt-\sqrt{t^2-x}\,dx=0$

б) $(1+x^2\sin 2t)\,dt-x^2\cos^2 t\,dt=0$

в) $(t\ln x+tx)\,dt+(x\ln t+tx)\,dx=0$

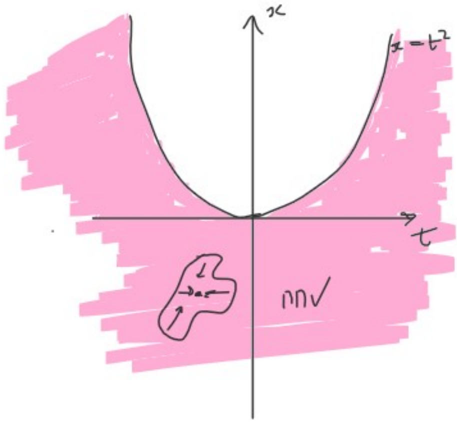
г) $(tx^2+3t^2x)\,dt+(t^3+t^2x)\,dx=0$

а) $M(t,x)=2t+2t\sqrt{t^2-x}$

$N(t,x)=-\sqrt{t^2-x}$

области: $t^2-x\geq 0$

$x\leq t^2$



$$M'_x=2t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t^2-x}}\cdot(-1)$$

$$\Rightarrow M'_x=N'_t \quad +\text{ПП}$$

$$\Downarrow$$

ТОТ. Д.

$$N'_t=-\frac{1}{2\sqrt{t^2-x}}\cdot 2t$$

$\Rightarrow\ \exists F,\ dF=M\,dt+N\,dx$

$F'_x=N$

$F'_t=M$

$\Rightarrow\ F'_x=-\sqrt{t^2-x}$

$F'_t=2t+2t\sqrt{t^2-x}$

$\int dx$

$$F(t,x)=\frac{2}{3}(t^2-x)^{3/2}+\overbrace{\varphi(t)}^{\text{конст. од } x}\ \cancel{(+c)}$$

$$F'_t=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(t^2-x)^{1/2}\cdot 2t+\varphi'(t)=2t+2t\sqrt{t^2-x}$$

$$\Rightarrow \varphi'(t)=2t\ \Rightarrow\ \varphi(t)=t^2\ \cancel{(+c)}$$

ако не зависи (само) од t

→ ГРЕШКА (у рачуну)

$$\boxed{\text{ОР}: \frac{2}{3}(t^2-x)^{3/2}+t^2=c,\ c\in\mathbb{R}}$$

$\boxed{8}$ Интеграциони фактор

$$M(t,x)\,dt+N(t,x)\,dx=0$$

$M'_x\neq N'_t \Rightarrow$ није ТОТ. Д.

Идеја: $\underbrace{\mu(t,x)\cdot\big(M(t,x)\,dt+N(t,x)\,dx\big)}_{}=0$ ← ТОТ. Д

$\mu(t,x)$ често тражимо у облику

$\mu=\mu(w)=\mu(w(t,x))$ $\quad \mu: A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}$

Идеја: $\underbrace{\mu(t,x)\cdot\big(M(t,x)\,dt+N(t,x)\,dx\big)}_{\text{тот. д.}}=0$

$\mu(t,x)$ често [illegible]

$\mu=\mu(w)=\mu(w(t,x))$

$\mu: A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}$

$w: D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}^2$

Предавања: $\dfrac{\mu'(w)}{\mu(w)}=\dfrac{N_t'-M_x'}{w_x'\cdot M-w_t'\cdot N}$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{N_t'-M_x'}{w_x'\cdot M-w_t'\cdot N}\,dw$$

$\to$ зависи само од w

Циљ: Наћи w !

Често:

- $w(t,x)=at+bx$ $\quad(w=t,\ w=x,\ \dots)$
- $w(t,x)=a\ln|t|+b\ln|x|$
- $w(t,x)=f(t)\cdot g(x)$
- $w(t,x)=f(t)+g(x)$

Проверити $\frac{1}{\mu}=0$ за решење које је можда изгубљено

(2) а) $(q(t)-p(t)x)\,dt-dx=0$, p,q познате $\leftarrow$ упоредити са линеарном ДЈ , $(w=t)$

б) $2tx\ln x\,dt+(t^2+x^2\sqrt{x^2+1})\,dx=0$

в) $x(2-3tx^2)\,dt-t(1+tx^2)\,dx=0$, на области $G=\{t>0,x>0\}$, решење пролази кроз $(2,1)$.

г) $(\sqrt{t^2-x}+2t)\,dt-dx=0$, μ у облику $\mu(t^2-x)$. $(w=t^2-x)$

д) $(t+2)\sin x\,dt+2t\cos x\,dx=0$ $\quad(w=x)$

$$\left(x'=\frac{dx}{dt}=-\frac{t+2}{2t}\cdot\operatorname{tg}x\right)$$

б) $M(t,x)=2tx\ln x$

$N(t,x)=t^2+x^2\sqrt{x^2+1}$

$M_x'=2t(x\ln x)'=2t(1+\ln x)$ $\quad\neq$

$N_t'=2t$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{N_t'-M_x'}{w_x'\cdot M-w_t'\cdot N}\,dw=\frac{-2t\ln x}{w_x'\cdot(2tx\ln x)-\underbrace{w_t'\cdot(t^2+x^2\sqrt{x^2+1})}_{=0}}\,dw=\frac{-2t\ln x}{1\cdot 2tx\ln x-0}\,dw=-\frac{1}{x}\,dw=-\frac{dw}{w}$$

$w=x^2$

$w=\ln x$

$w_t'=0\ \to\ w=x?$

$w_x'=1$

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{dw}{w}\ \Big/\int$$

$$\ln|\mu|=-\ln|w|\ \cancel{(+c)}$$

μ ...

$\ln|\mu| = -\ln|w|$ ~~$(+c)$~~

$\mu = \frac{1}{w}$, $\mu(t,x) = \mu(w(t,x)) = \frac{1}{w(t,x)} = \frac{1}{x}$.

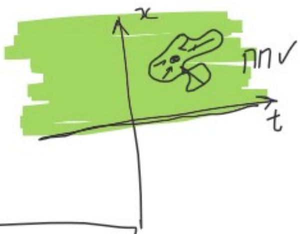
$\frac{1}{\mu} = x = 0$? $(\ln x)$ ✗

множимо са μ:

$$2t\ln x\,dt + \left(\frac{t^2}{x} + x\sqrt{x^2+1}\right)dx = 0$$

тот. д.? ✓

$\ln x \Rightarrow x > 0$



$F = ?$

$F'_t = 2t\ln x$

$F'_x = \frac{t^2}{x} + x\sqrt{x^2+1}$

$\therefore$

ОР:

$$\boxed{F(t,x) = t^2\ln x + \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} = c,\ c\in\mathbb{R}}$$

B) $M(t,x) = x(2-3tx^2)$

$N(t,x) = -t(1+tx^2)$

$M'_x = 2-9tx^2$

$N'_t = -1-2tx^2$ $\neq$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{N'_t - M'_x}{w'_x\cdot M - w'_t\cdot N}\,dw = \frac{-3+7tx^2}{w'_x\cdot(2x-3tx^3) + w'_t\cdot(t+t^2x^2)}\,dw = \frac{-3+7tx^2}{b(2-3tx^2)+a(1+tx^2)}\,dw$$

x x t t

$w'_x = \frac{1}{x}$?

$w'_t = \frac{1}{t}$?

$w = a\cdot\ln t + b\cdot\ln x$

пробамо

$(t>0, x>0, G)$

$w'_t = \frac{a}{t}$, $w'_x = \frac{b}{x}$

хоћемо да су сразмерни:

1: $2b + a = -3$

tx^2: $-3b + a = 7$

$-$ $5b = -10$

$b = -2$

$a = 1$

$w = \ln t - 2\ln x$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-3+7tx^2}{-3+7tx^2}\,dw = dw \,/\int$$

$\ln|\mu| = w \Rightarrow \mu = e^w$

$\frac{1}{\mu} = \frac{x^2}{t} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ✗

$G = \{t>0, x>0\}$ ✓

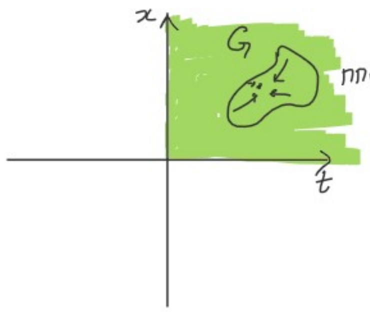
$$\mu(t,x) = e^{\ln t - 2\ln x} = \frac{t}{x^2}$$

$$\left(\frac{2t}{x} - 3t^2x\right)dt - \left(\frac{t^2}{x^2} + t^3\right)dx = 0$$

области?

$\Downarrow$

тот. д.



$F = ?$

$F'_t = \frac{2t}{x} - 3t^2x$

$F'_x = -\left(\frac{t^2}{x^2} + t^3\right)$

...

ОР:

$$\underline{F(t,x) = \frac{t^2}{x} - t^3\cdot x = c},\ c\in\mathbb{R}$$

Проходи через $(2,1)$:

$t=2$

$x=1$

$$\frac{2^2}{1} - 2^3 \cdot 1 = c \Rightarrow c = -4$$

ПР: $\boxed{\frac{t^2}{x} - t^3 x = -4}$