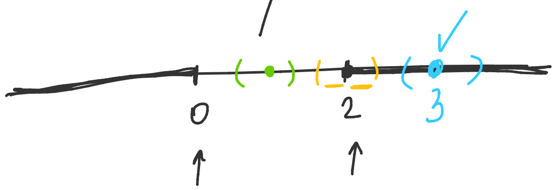
2. Дат је почетни проблем $x' = \frac{\chi_{[0,2]}(x)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{t-3}$, $x(0)=x_0$, $t\in[0,1]$, где је χ_A карактеристична функција скупа A. Проверити да ли су испуњени услови Пикарове теореме, ако је:

(а) $x_0 = 1$,
(б) $x_0 = 2$,
(в) $x_0 = 3$.

$$\left|\frac{1}{t-3}\right| \le \frac{1}{2}$$

$$\chi_{[0,2]}(x)\cdot\sqrt[3]{x-1}$$

$$x' = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{t-1} \quad \times \ (\text{липш})$$



$x_0=2$: $\quad \sqrt[3]{x-1}\cdot\chi_{[0,2]}(x)$ – није непр.

×

3. (а) Нека је $E\subset\mathbb{R}^n$ векторски потпростор и $A\in M_n(\mathbb{R})$ матрица таква да је $AX\in E$ за свако $X\in E$. Ако је $X_0\in E$ и $X(t)$ решење система $X'=AX$ које пролази кроз тачку X_0, доказати да је $X(t)\in E$ за свако $t\in\mathbb{R}$.

(б) Нека матрица A има барем једну реалну сопствену вредност $\lambda<0$. Доказати да постоји нетривијално решење система $X'=AX$ за које важи $\lim_{t\to+\infty}X(t)=0$.

v сопс. в. за $\lambda<0$

$$\boxed{X_p(t) = e^{\lambda t}\cdot v},\quad \lambda t\to-\infty \quad \Big\}\to 0$$

$$X(t) = \boxed{e^{tA}}\cdot X_0$$

$$X\in E \Rightarrow AX\in E$$

$$X_0\in E \overset{?}{\Rightarrow} e^{tA}\cdot X_0\in E$$

$$\left.\begin{array}{l} X\in E \overset{A\cdot}{\Rightarrow} AX\in E \overset{A\cdot}{\Rightarrow} A^2X\in E \\ \quad\vdots \\ X\in E \Rightarrow \dots \Rightarrow A^kX\in E \end{array}\right\} \text{в. пр.} \Rightarrow \left(X_0\in E \Rightarrow \frac{A^k}{k!}\cdot t^k\cdot X_0\in E \right.$$

→ множење конст.

⇓ → линеарност E

$$\left.\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}t^kX_0}_{e^{tA}\cdot X_0}\in E\right)$$

$$yx' \cancel{=} (xy)' \overset{?}{=} x'y + xy'$$

$$y\cdot x' + x\cdot y' = (xy)'$$