9 - понедељак 07.12.2020.

Жорданова нормална форма

$$\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \vee \quad B_i = \begin{bmatrix} R & E & & & \\ & R & E & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & E \\ & & & & R \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ако имамо поновљену реалну сопств. вр. λ

ако имамо поновљену комплексну сопс. вр. $\alpha \pm i\beta$

Нпр. $n=4$:

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \rightsquigarrow (\exists P, D)$ D - у Жорд. норм. форми

$P \in GL(n, \mathbb{R})$

① $X' = AX$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$$

$k=4$ – алгебарска вишеструкост

$(A-2E)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 0=0 \\ c=0 \\ 0=0 \\ a=0 \end{array} \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{bmatrix} = b \cdot \underbrace{\overset{v_1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + d \cdot \overset{v_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}_{2 \text{ лин. нез. сопс. век}}$$

$\dim(\ker(A-2E)) = 2 \Rightarrow m = 2$ - геометријска вишеструкост

→ имамо 2 Жорданова блока

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$\varphi(\lambda) = (\lambda-2)^4$ – карактеристични полином

$\mu(\lambda) = ?$ – минимални полином

$\mu(A)=0 \quad , \quad A-2E\neq 0$

$\mu | \varphi$

$$(A-2E)^{2}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \mu(\lambda)=(\lambda-2)^{2} \Rightarrow \deg\mu = 2$$

$\Downarrow$

ред највећег Жордановог блока 2

$$\Rightarrow D=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}\lambda&1\\&\lambda\end{matrix}}&\\&\boxed{\begin{matrix}\lambda&1\\&\lambda\end{matrix}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&&\\&2&&\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&\\&A\end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$$

γ_1 ? $\quad \gamma_3$?

уопштени сопствени вектори: $\quad (A-2E)\gamma_2=\gamma_1 \qquad (A-2E)\gamma_4=\gamma_3$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$0=0$
$c=1$
$0=0$
$a=0$

$\Rightarrow \gamma_2=\begin{bmatrix}0\\b\\1\\d\end{bmatrix}$

$\}\ b=d=0$

$\gamma_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

$\vdots$

$\gamma_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

само треба водити рачуна да су лин. нез. са претходним (γ_1,γ_3).

$$P=\begin{bmatrix}\boxed{\gamma_1\downarrow\ \ \gamma_2\downarrow}&\boxed{\gamma_3\downarrow\ \ \gamma_4\downarrow}\end{bmatrix}=\begin{array}{cccc}\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3&\gamma_4\end{array}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}, \quad \det P\neq 0$$

$$e^{tD}=e^{t\begin{bmatrix}A&\\&A\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}e^{tA}&\\&e^{tA}\end{bmatrix}=e^{2t}\begin{bmatrix}1&t&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&t\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$e^{tA}=e^{t\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}}=e^{\overset{J}{t\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}}+\overset{N}{t\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}}}\overset{(2)}{=}e^{tJ}\cdot e^{tN}=\underbrace{\begin{bmatrix}e^{2t}&0\\0&e^{2t}\end{bmatrix}}_{e^{2t}\cdot E}\cdot(E+t\cdot N)=e^{2t}\cdot\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}$$

$JN=NJ$

$$N^{2}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

ОР. $X(t) = e^{tA}\cdot c = P e^{tD}\underbrace{P^{-1}\cdot c}_{c_1} = P\cdot e^{tD}\cdot c_1$

$c_1, c \in \mathbb{R}^4$

(2) $X' = AX$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\varphi(\lambda) = -(\lambda-2)^3$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \Rightarrow k=3$

$(A-2E)\gamma = 0 \rightsquigarrow \gamma = a\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\gamma_1} + b\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\gamma_2} \Rightarrow \dim(\ker(A-2E)) = \dim \mathcal{L}in\{\gamma_1, \gamma_2\} = 2$

$m = 2$

2 блока

једино: $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

[провера: $(A-2E) \neq 0$ и $(A-2E)^2 = 0 \Rightarrow \mu(\lambda) = (\lambda-2)^2 \Rightarrow \deg \mu = 2$

највећи блок реда 2]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{tA} & \\ & e^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t}\cdot \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P = ?$ → треба нам 1 уопштена сопс. вр. (γ_3)

да ли одговара γ_1 или γ_2?

$(A-2E)\gamma_3 = \gamma_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} b+c &= 1 \\ -b-c &= 0 \\ b+c &= 0 \end{aligned}\right\} \lightning$$

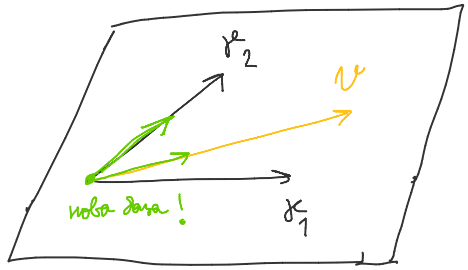
$(A-2E)\gamma_3 = \gamma_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} b+c &= 0 \\ -b-c &= 1 \\ b+c &= -1 \end{aligned}\right\} \lightning$$

→ нема решења по γ_3

шта сад?



γ_1, γ_2 - база

$v \in Lin\{\gamma_1, \gamma_2\} \to v$ има уопштени сопств.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \gamma_3 = v$$ ← има реш.

Ако није очигледно: $\alpha = ?$

$v = \gamma_1 + \alpha \gamma_2$

има решења систем

Узмемо $v = \gamma_1 - \gamma_2$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow Lin\{\gamma_1, \gamma_2\} = Lin\{v, \gamma_2\}$$

↳ јесте база

$$\left.\begin{aligned} b + c &= 1 \\ -b - c &= -1 \\ b + c &= 1 \end{aligned}\right\} c = 1 - b$$

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1-b \end{bmatrix} \xrightarrow{a=b=0} \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & v & \gamma_3 & \gamma_2 \\ P = & \left[\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}\right] \end{array}, \det P \neq 0$$

ОР: $x(t) = P \cdot e^{tD} \cdot c, \ c \in \mathbb{R}^3$

(3) $X' = AX$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \ \lambda_{3,4} = 1 \pm i$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$: $k = 2$

$$(A - 2E)\gamma_1 = 0 \rightsquigarrow \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow m = 1 \to \text{један блок} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

γ_2 - уопштени с.в.

$$(A - 2E)\gamma_2 = \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = 1 + i$: $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\alpha = 1, \beta = 1$

$\lambda_3 = 1+i:$ $\quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\alpha = 1, \beta = 1$

$$(A - \lambda_3 E)\nu_3 = 0 \Rightarrow \nu_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1+i \\ -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \boxed{\nu_1\downarrow \quad \nu_2\downarrow} & \boxed{\mathrm{Re}\,\nu_3\downarrow \quad \mathrm{Im}\,\nu_3\downarrow} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad [\det P \neq 0]$$

$$D = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{tA} & \\ & e^{tB} \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = \ldots = e^{2t}\cdot\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{tB} = e^t\cdot R_t = e^t\cdot\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$\text{ОР}: \; X(t) = P\cdot e^{tD}\cdot c = P\cdot\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t\cos t & e^t\sin t \\ 0 & 0 & -e^t\sin t & e^t\cos t \end{bmatrix}\cdot c, \quad c\in\mathbb{R}^4$$

(4) Решити систем ДЈ:

(по $x(t), y(t)$)

$$t^2xx' = \frac{x^2}{2} + e^{2y} \quad /\cdot 2$$

$$2t^2y' = -3\cdot\frac{x^2}{e^{2y}} - 4 \quad /\cdot e^{2y}$$

идеја: смене!

$$t^2\cdot(\overbrace{2xx'}^{(x^2)'}) = \boxed{x^2} + 2\boxed{e^{2y}}$$

$$t^2\cdot(\underbrace{2e^{2y}y'}_{(e^{2y})'}) = -3\boxed{x^2} - 4\boxed{e^{2y}}$$

$u(t) = x(t)^2 \Rightarrow u' = 2xx'$

$v(t) = e^{2y(t)} \Rightarrow v' = 2e^{2y}y'$

$$\Downarrow$$

$$t^2u' = u + 2v$$

$$t^2v' = -3u - 4v$$

сметња!

$f(t) = t^2$

смена: $\tau'_t = \frac{1}{t^2} \Rightarrow \tau(t) = -\frac{1}{t}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(t) \cdot X' = AX$

смена: $\begin{bmatrix} X(t) \rightsquigarrow X(\tau) \\ t \rightsquigarrow \tau \end{bmatrix}$

$\tau'_t = \frac{1}{f(t)}$

$X' = AX$

смена: $\tau'_t = \frac{1}{t^2} \Rightarrow \tau(t) = -\frac{1}{t}$

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\tau} \cdot \underbrace{\frac{d\tau}{dt}}_{\tau'_t} = \frac{du}{d\tau} \cdot \frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{du}{d\tau} = t^2 \cdot u'$$

$$\frac{dv}{d\tau} = t^2 \cdot v'$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u + 2v \\ \frac{dv}{d\tau} &= -3u - 4v \end{aligned}\right\}$$ знаем да решим! (лесно)

решим $\rightsquigarrow$ $\tau \to t$ $\rightsquigarrow$ $u \to x$, $v \to y$

⑤ $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Сведете системата $\begin{aligned} x_1' &= px_1 - qx_2 \\ x_2' &= qx_2 + px_1 \end{aligned}$ на ДУ 2 реда.

$$x_1' = px_1 - qx_2 \Rightarrow x_2 = \frac{px_1 - x_1'}{q} \Rightarrow x_2' = \frac{px_1' - x_1''}{q}$$

$$x_2' = qx_2 + px_1 \Rightarrow \frac{px_1' - x_1''}{q} = \cancel{q} \cdot \frac{px_1 - x_1'}{\cancel{q}} + px_1 \; / \cdot q$$

$$px_1' - x_1'' = pqx_1 - qx_1' + pqx_1$$

$$\boxed{x_1''} + \boxed{x_1'} \cdot (-p - q) + 2pq\boxed{x_1} = 0$$

→ 2. реда

⑥ $p, q \in \mathbb{R}$. Сведете ДУ. $x'' + px' + qx = 0$ на система 2 ДУ 1. реда.

$x_1 = x$

$\boxed{x_2 = x'} \Rightarrow x_2' = x''$

$x_2 = x' = x_1'$

$x_2' + px_2 + qx_1 = 0$

Система: $\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -qx_1 - px_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$