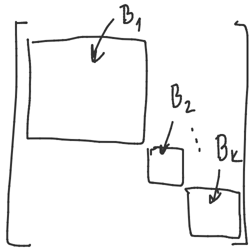
Жорданова нормална форма



, $B_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$ $\vee$ $B_i = \begin{bmatrix} R & E & & \\ & R & E & \\ & & \ddots & E \\ & & & R \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$[\lambda]$ ↳ $\lambda \in \mathbb{R}$ поновљена

↳ $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ поновљена

нпр: $n=4$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$A = P \cdot \underline{D} \cdot P^{-1} \rightsquigarrow (\exists P, D)$$

↳ Жорд. норм. ф.

$P \in GL(n, \mathbb{R})$

(1) $X' = AX$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$$

$k = 4$ – алгебарска вишеструкост

$$(A - 2E)\gamma = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = 0 \\ c = 0 \\ 0 = 0 \\ a = 0 \end{matrix} \Rightarrow \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{bmatrix} = b \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\gamma_1} + d \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\gamma_3}$$

2 лин. нез. сопс. век.

$\dim(\ker(A - 2E)) = 2 \Rightarrow m = 2$ – геометријска вишеструкост

↳ имамо 2 Жорданова блока

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^4$ – карактеристични полином

$\mu(\lambda) = ?$ – минимални полином

$\mu \mid \chi$

$\mu(A)=0$

$A-2E \neq 0$

$(A-2E)^{2} = \ldots = 0 \Rightarrow \mu(\lambda) = (\lambda-2)^{2} \Rightarrow \deg \mu = 2$

↳ ред највећег Жордановог блока је 2

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \\ & A \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

γ_1 ? γ_3 ?

уопштени сопствени вектори: $(A-2E)\gamma_2 = \gamma_1$ $(A-2E)\gamma_4 = \gamma_3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0=0 \\ c=1 \\ 0=0 \\ a=0 \end{matrix} \Rightarrow \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 1 \\ d \end{bmatrix}$$

$b=d=0$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

треба гледати да су лин. нез. са претходним (γ_1, γ_3)

$$P = \begin{bmatrix} \boxed{\gamma_1\downarrow \ \gamma_2\downarrow} & \boxed{\gamma_3\downarrow \ \gamma_4\downarrow} \end{bmatrix} = \begin{array}{cccc} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det P \neq 0$$

$$e^{tD} = e^{t\begin{bmatrix} A & \\ & A \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{tA} & \\ & e^{tA} \end{bmatrix} = e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & t \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{t\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} = e^{t \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}^{=J} + t \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{=N}} = e^{tJ} \cdot e^{tN} = e^{2t} \cdot E \cdot (E + tN) = e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$JN = NJ$

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{2t} & \\ & e^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t} \cdot E, \quad e^{tN} = E + tN$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & \\ & e^{2t}\end{bmatrix} = \ldots$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ОР: $X(t) = e^{tA}\cdot c = P\cdot e^{tD}\cdot \underbrace{P^{-1}\cdot c}_{c_1} = P e^{tD}\cdot c_1, \quad c_1, c \in \mathbb{R}^4$

$A = PDP^{-1}$

② $X' = AX$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\varphi(\lambda) = -(\lambda-2)^3$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \Rightarrow k=3$

$(A-2E)v = 0 \longrightarrow v = a\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{= v_1} + b\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{= v_2} \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A-2E)) = \dim \mathrm{Lin}\{v_1, v_2\} = 2$

2 блока

једино може: $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \\ & 2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

[провера: $(A-2E) \neq 0$, $(A-2E)^2 = 0 \Rightarrow \mu(\lambda) = (\lambda-2)^2$, $\deg \mu = 2$]

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{tA} & \\ & e^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t}\cdot \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P = ?$ → треба нам 1 уопштени сопс. век. (v_3)

да ли одговара v_1 или v_2?

$(A-2E)v_3 = v_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$b+c=1$
$-b-c=0$ ↯
$b+c=0$

$(A-2E)v_3 = v_2$

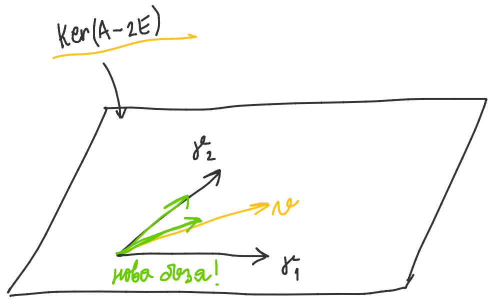
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$b+c=0$
$-b-c=1$ ↯
$b+c=-1$

→ нема решења за v_3 !

шта сад?

шта сад:



γ_1, γ_2 − база

$v \in Lin\{\gamma_1, \gamma_2\} \rightsquigarrow v$ има уопштени сопс. век.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \gamma_3 = v$$

$v = \gamma_1 + \alpha \cdot \gamma_2$

$\alpha = ?$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

тд. има решења по γ_3

узмемо $v = \gamma_1 - \gamma_2$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow Lin\{\gamma_1, \gamma_2\} = Lin\{v, \gamma_2\}$$

↳ нова база!

$$\left.\begin{aligned} b + c &= 1 \\ -b - c &= -1 \\ b + c &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = 1 - b$$

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1-b \end{bmatrix} \xrightarrow{a=b=0} \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} v & \gamma_3 & \gamma_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \det P \neq 0$$

ОР: $X(t) = P \cdot e^{tD} \cdot c, \ c \in \mathbb{R}^3$

(3) $X' = AX$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_{3,4} = 1 \pm i$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$: $k=2$

$$(A - 2E)\gamma = 0 \rightsquigarrow \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow m = 1 \rightarrow \text{један блок} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

γ_2 уопштени

$$(A - 2E)\gamma_2 = \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = 1+i$:

$\alpha=\beta=1$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_3 E)\gamma_3 = 0 \rightsquigarrow \gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1+i \\ -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow P = \begin{bmatrix} \gamma_1\downarrow & \gamma_2\downarrow & \mathrm{Re}\,\gamma_3\downarrow & \mathrm{Im}\,\gamma_3\downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$[\det P \neq 0]$

$$e^{tD} = e^{t\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{tA} & \\ & e^{tB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}\cdot\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \\ & e^t\cdot R_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & t\cdot e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t\cos t & e^t\sin t \\ 0 & 0 & -e^t\sin t & e^t\cos t \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$e^{t\cdot \underset{\alpha=1}{1}}\cdot R_{t\cdot \underset{\beta=1}{1}} = e^t\cdot R_t = e^{tB}$$

Ответ: $X(t) = P\cdot e^{tD}\cdot c,\ c \in \mathbb{R}^4$

идея: смена!

(4) Решить систему ДУ: (на $x(t), y(t)$)

$$t^2 x x' = \frac{x^2}{2} + e^{2y} \quad /\cdot 2$$

$$2t^2 y' = -3\cdot\frac{x^2}{e^{2y}} - 4 \quad /\cdot e^{2y}$$

$$t^2\cdot \underbrace{(2xx')}_{(x^2)'} = \boxed{x^2} + 2\cdot\boxed{e^{2y}}$$

$$t^2\cdot \underbrace{(2e^{2y}y')}_{(e^{2y})'} = -3\boxed{x^2} - 4\boxed{e^{2y}}$$

$u(t) = (x(t))^2 \Rightarrow u' = 2xx'$

$v(t) = e^{2y(t)} \Rightarrow v' = 2e^{2y}\cdot y'$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} t^2\cdot u' = u + 2v \\ t^2\cdot v' = -3u - 4v \end{cases}$$

странно!

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(t)\cdot X'(t) = A\cdot X(t)$

смена: $X(t) \rightsquigarrow X(\tau)$, $t \rightsquigarrow \tau$

$\tau'_t = \frac{1}{f(t)}$

$X'(\tau) = AX(\tau)$

смена: $f(t) = t^2$

$\tau'_t = \frac{1}{t^2} \Rightarrow \tau(t) = -\frac{1}{t}$

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\tau}\cdot\underbrace{\frac{d\tau}{dt}}_{\tau'_t} = \frac{du}{d\tau}\cdot\frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{du}{d\tau} = t^2\cdot u'$$

$$t^2 v' = \ldots = \frac{dv}{d\tau}$$

$$\frac{du}{d\tau} = u + 2v$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u+2v \\ \frac{dv}{d\tau} &= -3u-4v \end{aligned}\right\} \text{(ЛСДЈКК)}$$

решити $\longrightarrow$ $\tau \to t$ $\longrightarrow$ $u \to x$, $v \to y$

(5) $p,q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Сведи систем $x_1' = px_1 - qx_2$, $x_2' = qx_2 + px_1$ на ДЈ 2. реда.

$$\boxed{x_2 = \frac{px_1 - x_1'}{q}} \Longrightarrow \boxed{x_2' = \frac{px_1' - x_1''}{q}}$$

$$\boxed{\frac{px_1' - x_1''}{q}} = q \cdot \boxed{\frac{p \cdot x_1 - x_1'}{q}} + px_1 \quad /\cdot q \Longrightarrow px_1' - x_1'' = pqx_1 - qx_1' + pqx_1$$

2 реда

$$\boxed{x_1''} + \boxed{x_1'}(-p-q) + \boxed{x_1}(2pq) = 0$$

(ЛДЈВРКК)

(6) $p,q \in \mathbb{R}$. Сведи ДЈ $\underline{x'' + px' + qx = 0}$ на систем 2 ДЈ 1. реда.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x' \end{aligned}\right\} \text{2 нове непознате}$$

$x_2' = x''$

$x_2' + px_2 + qx_1 = 0 \Longrightarrow x_2' = -qx_1 - px_2$

$x_2 = x' = x_1'$

систем: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$