① Нека је $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{R})$, $a_{ij}\geq 0$ $\forall i\neq j$. Нека је $B=e^A=[b_{ij}]_{i,j=1}^n$. Доказати да је $b_{ij}\geq 0$ $\forall i,j$.

$$A = \begin{bmatrix} ? & \geq 0 \\ \geq 0 & ? \end{bmatrix} \Rightarrow B = e^A = \begin{bmatrix} \geq 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \geq 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{bmatrix} \geq 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B = e^A = \begin{bmatrix} \geq 0 \end{bmatrix}$$

идеја: поделити $A = A_1 + E_1$, где A_1 има елементе ≥ 0 и e^{E_1} има ел. ≥ 0 и $A_1E_1 = E_1A_1$.

E_1 – узмемо да је пропорционална јединичној

$$A = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & -5 \end{bmatrix}$$

$M = 5$

$A_1 = A + 5\cdot E$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 8 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \geq 0$$

$$E_1 = -E\cdot \underbrace{\max_{1\leq i\leq n}|a_{ii}|}_{=M}$$

$$A_1 = A - E_1 = [c_{ij}]_{i,j=1}^n$$

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i\neq j \\ a_{ii}+M, & i=j \end{cases} \geq 0$$

$$(\forall i) \quad a_{ii} + \max_{1\leq j\leq n}|a_{jj}| \geq a_{ii} + |a_{ii}| \geq 0$$

$$A_1E_1 = A_1(-ME) = -MA_1E = -MA_1 = -MEA_1 = E_1A_1$$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $e^A = e^{A_1+E_1} \overset{(2)}{=} e^{A_1}\cdot e^{E_1}$ — e^{A_1}: има ел. ≥ 0, јер A_1 има ел. ≥ 0; e^{E_1}: ел. ≥ 0 $\Big\}\Rightarrow b_{ij}\geq 0$.

$$e^{E_1} = e^{-ME} = \exp\left(\begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{-M} & 0 \\ 0 & e^{-M} \end{bmatrix}$$

$e^{-M} \geq 0$

Фундаментални систем решења (скуп): скуп n независних решења $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$ система $X'(t) = A(t)\cdot X(t)$

$\Phi(t) = [\varphi_1(t)\downarrow \dots \varphi_n(t)\downarrow]$ – фундаментална матрица

$W(t) = \det\Phi(t)$ – Вронскијан

$[\varphi_1' \dots \varphi_n'] = [\varphi_1 \dots \varphi_n]' = A[\varphi_1 \dots \varphi_n] \Rightarrow \varphi_k' = A\varphi_k$ $\forall k$

свака колона

② Нека матрица $\Phi(t)$ је фундаментална $\Rightarrow$ $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ и $W(t)\neq 0$.

$W(t) = \det \Psi(t)$ – Вронскијан

$[\varphi_1' \dots \varphi_n'] = [\varphi_1 \dots \varphi_n] = A[\varphi_1 \dots \varphi_n] \to \varphi_k' = A\varphi_k \ \forall k$

свака колона $\Phi(t)$ је решење

(*) Нека матрица $\Phi(t)$ је фундаментална за $X' = AX$ $\Leftrightarrow$ $\Phi'(t) = A(t)\,\Phi(t)$ и $W(t) \neq 0$.

$X' = AX \rightsquigarrow X = e^{tA}\cdot \underset{\sim}{c}$, $\quad c = X(0) = x_0$

$A \in M_n(\mathbb{R})$

$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

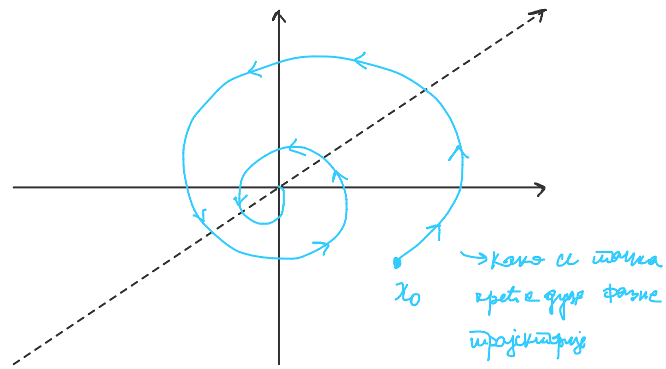
$x_0 \mapsto \underbrace{e^{tA}}\cdot x_0$

↳ кроз време

$\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

↳ ток система (кретање)

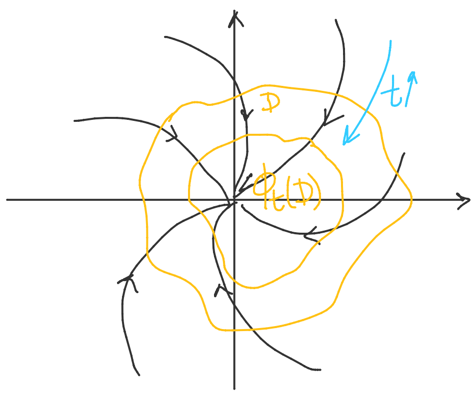
$\phi_t(x_0) = e^{tA}\cdot x_0$



$\boxed{T}$ (Лиувил) Ток ϕ_t система $X' = AX$ мења запремину (мерљиве) области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ као

$$\mathrm{Vol}(\phi_t(D)) = e^{t\cdot \mathrm{tr}A}\cdot \mathrm{Vol}(D)$$

пр.



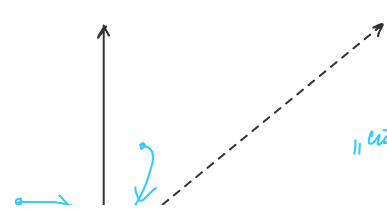
$\mathrm{Vol}(\phi_t(D)) < \mathrm{Vol}(D)$ – смањује запремину

- смањује $\mathrm{tr}(A) < 0$
- чува запремину $\mathrm{tr}(A) = 0$
- повећава $\mathrm{tr}(A) > 0$

---

② $X' = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}}_{A} X$, $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Како се креће решење из сваке тачке? Како овај систем мења запремину?

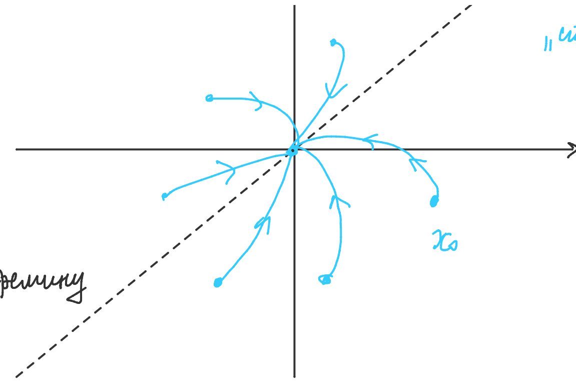
$$\phi_t(x_0) = e^{tA}\cdot x_0 = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & e^{t\lambda_2} & \\ & & e^{t\lambda_3} \end{bmatrix}\cdot x_0$$



„стабилни чвор“

$$e^{t\lambda_3} \quad \cdot x_0$$

$$\lim_{t\to\infty} \Phi_t(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



„стабилни чвор"

$\mathrm{tr}\, A = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 < 0 \Rightarrow$ систем смањује запремину

③ Доказати да је за ЛСДЈКК фундаментална матрица дата са $\Phi(t) = e^{tA}$.
$X' = AX$

1) $\Phi'(t) = A\Phi(t)$

2) $W(t) \neq 0$

1) $\Phi'(t) = (e^{tA})' \overset{(5)}{=} A \cdot e^{tA} = A\Phi(t)$

2) $W(t) = \det \Phi(t) = \det(e^{tA}) = e^{\mathrm{tr}(tA)} > 0 \Rightarrow W(t) \neq 0$

(*) Нпр. дата је фунд. матр. $\Phi(t)$, одредити A. $\Phi'(t) = A\Phi(t) \Rightarrow A = \Phi'(t)\cdot\Phi(t)^{-1}$ ...

Решавање ЛСДЈКК у општем случају

$X' = AX$

$A = PDP^{-1}$ → у Жордановој нормалној форми

$X(t) = e^{tA}\cdot c = e^{tPDP^{-1}}\cdot c \overset{(7)}{=} P\cdot e^{tD}\cdot P^{-1}\cdot c \quad , c \in \mathbb{R}^n$

P – матрица прелаза

e^{tD} – знамо да израчунамо

A
$\Downarrow$
$D = ?$
$P = ? \quad (P^{-1} = ?)$
$e^{tD} = ?$

④
$$x_1' = x_1 - x_2 + x_3$$
$$x_2' = x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_3' = 2x_1 - x_2$$

$$X' = AX, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$0 = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = (1-\lambda)^2(-\lambda) + (-1)^2 \cdot 2 + 1^2(-1) - 2(1-\lambda)\cdot 1 - (-1)^2(1-\lambda) - (-\lambda)\cdot 1 \cdot (-1) =$$

$$= -\lambda(1 - 2\lambda + \lambda^2) + \cancel{2} - 1 - \cancel{2} + 2\lambda - 1 + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} =$$

$$= -\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 2\lambda - 2 =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 =$$

$\lambda = 1$ ✓ $\longrightarrow$ $= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) =$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)(2-\lambda) \quad \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{matrix}\right\}$$ реални и различни → 3 собс. вектора

$\lambda_1 = 1:$ $\quad (A - \lambda_1 E) v_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \qquad \left.\begin{matrix} -b + c = 0 \\ a \quad - c = 0 \\ 2a - b - c = 0 \end{matrix}\right\} +$$

$$-b + c = 0 \Rightarrow c = b$$

$$\left.\begin{matrix} a - b = 0 \\ 2a - 2b = 0 \end{matrix}\right\} a = b \qquad \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -1:$ $\quad (A - \lambda_2 E) v_2 = 0 \quad \dots \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 2:$ $\quad (A - \lambda_3 E) v_3 = 0 \dots \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$P^{-1} = ?$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot \operatorname{Adj} P = \frac{1}{-6} \cdot \begin{bmatrix} +(-3) & -(1) & +(-2) \\ -6 & +0 & -(-6) \\ +3 & -(-1) & +(-4) \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -6 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det P = -3 + 0 - 5 + 3 - 0 - 1 = -6$$

$$\text{OP}: \ X(t) = P \cdot e^{tD} \cdot P^{-1} \cdot c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & & \\ & e^{-t} & \\ & & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot c, \ c \in \mathbb{R}^3$$

$= c_1 \in \mathbb{R}^3$

$$= P \cdot e^{tD} \cdot c_1, \ c_1 \in \mathbb{R}^3$$

(* може и не тражете P^{-1}, ако нема потреба!)

(5)

$$x_1' = -3x_1$$
$$x_2' = 3x_2 - 2x_3$$
$$x_3' = x_2 + x_3$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow -(\lambda+3)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \ \lambda_2 = 2+i, \ \lambda_3 = 2-i$$

компл. конј.

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$$

$$\lambda_1 = -3: \ (A - \lambda_1 E)\gamma_1 = 0 \ \ldots \ \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2+i: \ (A - \lambda_2 E)\gamma_2 = 0$$

← компл. сопс. век.

$$\begin{bmatrix} -3-(2+i) & 0 & 0 \\ 0 & 3-(2+i) & -2 \\ 0 & 1 & 1-(2+i) \end{bmatrix} \gamma_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -5-i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & -2 \\ 0 & 1 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$(-5-i)a=0 \Rightarrow a=0$$

$$\begin{aligned}(1-i)b-2c&=0\\ b+(-1-i)c&=0 \quad /\cdot(-1+i)\end{aligned} \quad +$$

$$b+(-1-i)c=0 \Rightarrow b=(1+i)c$$

нпр. $c=1$, $b=1+i$

$$0\cdot b + c\underbrace{(-2+(-1-i)(-1+i))}_{-2+1+i-i+1=0}=0 \Leftarrow 0=0 \checkmark$$

$$v_2=\begin{bmatrix}0\\1+i\\1\end{bmatrix}$$

(за λ_3 не тражити v_3: $\lambda_3=\overline{\lambda_2} \Rightarrow v_3=\overline{v_2}$)

$$\alpha+i\beta \leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$$

$$2+i \leftrightarrow \begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$\lambda_1=-3$

$$D=\begin{bmatrix}\boxed{-3} & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix} \quad \lambda_2=2+i$$

$$e^{tD}=\begin{bmatrix}e^{-3t} & 0 & 0\\ 0 & \multicolumn{2}{c}{e^{t\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}}_{2\times 2}}\\ 0 & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-3t} & 0 & 0\\ 0 & e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t\\ 0 & -e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t\end{bmatrix}$$

$e^{t\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}} = e^{2t}\cdot R_{t\cdot 1}$ (1г) → битно

Блоковска матрица:

$$D=\begin{bmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{bmatrix}$$

$$e^{tD}=\begin{bmatrix}e^{tB_1} & 0\\ 0 & e^{tB_2}\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}v_1\downarrow & \operatorname{Re}v_2\downarrow & \operatorname{Im}v_2\downarrow\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$v_2=\begin{bmatrix}0\\1+i\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{Re}v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Im}v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

(за вежбу: $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&-2\end{bmatrix}$)

ОР: $X(t)=P\cdot e^{tD}\cdot \underset{P^{-1}\cdot c}{\underset{\shortparallel}{c_1}}$, $c_1\in\mathbb{R}^3$